U(1) kalibrační symetrie a nabitá pole

Vektorové prostory s U(1) symetrií

$\mathbb{C} = \mathbb{C}_L$ a $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_R$ sdružené komplexní vekt. prostory $\mathbb{C}$-dim $= 1$

$\mathbb{C}^{k_L k_R}_{l_L l_R}$ příslušné tenzorové prostory – všechny $\mathbb{C}$-dim $= 1$

$h_{\bar{A}B}$ hermitovská struktura definující sk. součin na $\mathbb{C}$ a $\bar{\mathbb{C}}$

U(1) kalibrační transformace – transformace zachovávající skalární součin

jelikož jsou všechny prostory $\mathbb{C}^{k_L k_R}_{l_L l_R}$ $\mathbb{C}$-dim $= 1$, jsou isomorfní jako vektorové prostory

mohou se ale lišit akcí kalibrační transf. na nich

ztotožníme ty prostory, na nichž kalibr. transf působí stejně

kanonická ztotožnění neměnící akci kalibr. transf.

- stopa $\mathbb{C}^{k+1}_{l+1} \leftrightarrow \mathbb{C}^{k}_{l}$ resp. $\bar{\mathbb{C}}^{k+1}_{l+1} \leftrightarrow \bar{\mathbb{C}}^{k}_{l}$

$$\phi^{\dots A \dots}_{\dots B \dots} \to \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots} = \phi^{\dots M \dots}_{\dots M \dots} \qquad \text{inverze:} \quad \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots} \to \phi^{\dots A \dots}_{\dots B \dots} = \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots}\, \mathbb{1}^{A}_{B}$$

umožňuje "kanonizovat" objekty z $\mathbb{C}^{k}_{l}$ na $\mathbb{C}^{k-l}_{0}$ nebo $\mathbb{C}^{0}_{l-k}$

- hermit. forma $\mathbb{C}^{k+1\, l+1}_{p\ q} \leftrightarrow \mathbb{C}^{k\ l}_{p\ q}$ resp. $\mathbb{C}^{k\ l}_{p+1\, q+1} \leftrightarrow \mathbb{C}^{k\ l}_{p\ q}$

$$\phi^{\dots\bar{A}\dots B\dots}_{\dots} \to \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots} = \phi^{\dots\bar{A}\dots B\dots}_{\dots}\, h_{\bar{A}B} \qquad \text{inverze} \quad \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots} \to \phi^{\dots\bar{A}\dots B\dots}_{\dots} = \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots}\, h^{-1\bar{A}B}$$

$$\phi_{\dots\bar{A}\dots B\dots} \to \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots} = \phi_{\dots\bar{A}\dots B\dots}\, h^{-1\bar{A}B} \qquad \text{inverze} \quad \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots} \to \phi_{\dots\bar{A}\dots B\dots} = \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots}\, h_{\bar{A}B}$$

umožňuje "kanonizovat" objekty z $\mathbb{C}^{k\ l}_{p\ q}$ na $\mathbb{C}^{k-l\ 0}_{p\ q}$ nebo $\mathbb{C}^{0\ l-k}_{p\ q}$

případně z $\mathbb{C}^{k\ l}_{p\ q}$ na $\mathbb{C}^{k\ l}_{p-q\ 0}$ nebo $\mathbb{C}^{k\ l}_{0\ q-p}$

- transpozice $\mathbb{C}^{k+1\ l}_{p\ q} \leftrightarrow \mathbb{C}^{k\ l}_{p\ q+1}$ resp. $\mathbb{C}^{k\ l+1}_{p\ q} \leftrightarrow \mathbb{C}^{k\ l}_{p+1\ q}$

$$\phi^{\dots A\dots}_{\dots} \to \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots\bar{B}\dots} = \phi^{\dots A\dots}_{\dots}\, h_{A\bar{B}} \qquad \text{inverze} \quad \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots\bar{B}\dots} \to \phi^{\dots A\dots}_{\dots} = h^{-1A\bar{B}}\, \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots\bar{B}\dots}$$

$$\phi^{\dots\bar{A}\dots}_{\dots} \to \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots B\dots} = \phi^{\dots\bar{A}\dots}_{\dots}\, h_{\bar{A}B} \qquad \text{inverze} \quad \tilde{\phi}^{\dots}_{\dots B\dots} \to \phi^{\dots\bar{A}\dots}_{\dots} = h^{-1\bar{A}B}\, \phi^{\dots}_{\dots B\dots}$$

umožňuje "kanonizovat" objekty z $\mathbb{C}^{k,\ l}_{p,q}$ na $\mathbb{C}^{k+q\ l+p}_{0\ \ 0}$

kombinace dvou těchto transf. je ekvivalentní třetí kombinací těchto operací lze vždy nalézt "kanonický" isomorfní prostor následujícího typu

$$C^{kl}_{pq} \to \begin{cases} C^{m0}_{00} & & C^{m} & \\ C^{00}_{00} = \mathbb{C} & \text{budeme značit} & C^{0} & \text{kde } m \in N \\ C^{0m}_{00} & & C^{-m} & \end{cases}$$

budeme říkat že prostor C^n odpovídá náboji n

lze lehce ověřit, že tenz. násobení indukuje operaci

násobení $C^n \times C^m \to C^{n+m}$ $\qquad \phi \in C^n \;\; \psi \in C^m \Rightarrow \phi\psi \in C^{n+m}$

operace sdružení převrací náboj

$\bar{\ } : C^n \to C^{-n}$ $\qquad \phi \in C^n \Rightarrow \bar{\phi} \in C^{-n}$

skalární součin dává číslo, tj. objekt náboje 0

$\langle \phi, \psi \rangle = \bar{\phi}\psi \in C^0$ $\qquad \phi, \psi \in C^n$

lze definovat celočíselné mocniny

p-tá mocnina: $C^n \to C^{pn}$ $\qquad \phi \in C^n \Rightarrow \phi^p \in C^{pn}$

U(1) kalibrační transformace na C

$U^A{}_B \in C^{10}_{10}$ zachovávající skal. součin

$\Downarrow$ $U \in C^0 = \mathbb{C}$ $\qquad \bar{U} U = 1$

$\Downarrow$ $U = \exp(iu)$ $\qquad u \in \mathbb{R}$

akce kalibr. symetrie na C^n

na C^{kl}_{pq} kalibr. sym. působí $\underbrace{U \cdots}_{k} \underbrace{\bar{U} \cdots}_{l} \underbrace{U^{-1} \cdots}_{p} \underbrace{\bar{U}^{-1}}_{q} \phi$

$\downarrow$ na C^n kalibr. sym. působí $U^n \phi$ tj.

$\phi \in C^n \to \tilde{\phi} = U^n \phi = \exp(inu)\,\phi$

volba báze

$E \in C^1 \qquad \bar{E} E = 1$

$\phi \in C^1 \Rightarrow \phi = \varphi E \qquad \varphi \in \mathbb{C}$

$\psi \in C^n \Rightarrow \psi = \psi E^n \qquad \psi \in \mathbb{C}$

Nabitá pole a derivace na nich

$\mathbb{C}^m M$ vektorové bundly se standardními fibry $\mathbb{C}^n$ $m \in \mathbb{Z}$

$\phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^m M$ nazýváme nabité pole náboje m

na $\mathbb{C}^m M$ jsou definovány všechny struktury z $\mathbb{C}^m$ tj.

pro $\phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^m M$ $\quad \psi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^n M$

- násobení $\quad \phi\psi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^{m+n} M$
- mocnina $\quad \phi^r \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^{rm} M$
- nábojové sdružení $\quad \bar{\phi} \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^{-m} M$
- fibrový sk. součin $\quad \langle \phi, \psi \rangle = \bar{\phi}\psi \in \mathcal{F}M$ $\quad$ pro $m=n$

lokální kalibrační grupa

kalibrační transf. je dána komplexní fází v každém bodě M

$$U(x) = \exp(i\, u(x)) \qquad u \in \mathcal{F}M \ (\text{reálné})$$

akce kalibrační grupy na $\mathbb{C}^m M$

$$\phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^m M \longrightarrow \tilde{\phi} = U^m \phi$$

$U(1)$ kovariantní derivace na $\mathbb{C}^m M$

D kov. der. na vekt. bundlech $\mathbb{C}^r M$ splňující

$$D(\phi\psi) = (D\phi)\psi + \phi(D\psi)$$

$$D\bar{\phi} = \overline{D\phi} \qquad \text{tj.} \quad D = \bar{D}$$

$\overline{D\phi}$ – derivace na $\mathbb{C}^m M$

$D\bar{\phi}$ – derivace na $\mathbb{C}^{-m} M$

zajišťuje konzistenci s hermitovskou strukturou

$$d(\bar{\phi}\psi) = (\overline{D\phi})\psi + \bar{\phi}(D\psi) \qquad \phi, \psi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^m M$$

$$\Updownarrow$$

$$d\langle \phi, \psi \rangle = \langle D\phi, \psi \rangle + \langle \phi, D\psi \rangle$$

trivializace na $\mathbb{C}^m M$

E jednotková báze v $\mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^1 M$ $\qquad \bar{E}E = 1$

E^m báze pro nabité pole náboje m, tj. v $\mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^m M$

$$\phi = \varphi E^m \qquad \varphi \text{ komplexní fce na } M$$

rozdíl dvou kov. derivací

$D, \tilde{D}$ kov. der. na $\mathbb{C}^n M$

$D_m - \tilde{D}_m = \mathcal{A}_m$ pseudoderivace indukovaná rozdílový tenzorem $i A_m$

$D_m \phi - \tilde{D}_m \phi = i A_m \phi$ pro $\phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^1 M$

$\Downarrow$

$D_m \psi - \tilde{D}_m \psi = \mathcal{A}_m \psi = i m A_m \psi$ pro $\psi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^m M$

$A_m \in \mathcal{T} M$ rozdílový tenzor je nenabitý! vskutku, měl by být $A_m{}^k{}_l$ což je pole náboje 0

$A_m^* = A_m$ rozdílový tenzor je reálný (hermit. v dim = 1) to je důvod pro volbu prefaktoru "i"

často se z rozdílového tenzoru vyjme ještě konstantní prefaktor e charakterizující velikost elementárního náboje

$D\phi - \tilde{D}\phi = i e A$

vektorový potenciál

E trivializace a ∂ souř. derivace $\partial E = 0$

kov. der. D na $\mathbb{C}^n M$ je dána vekt. potenciálem A_a vůči ∂

$$D_a \phi = \partial_a \phi + i m A_a \phi \qquad \text{pro } \phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^n M$$

tenzor křivosti

D kov. der. na $\mathbb{C}^n M$ rozšířená na $\mathcal{T} M$ pomocí ∇ s torzí T

operátor křivosti $\mathbb{F}_{ab}$

$$\mathbb{F}_{ab} = {}^D d_a {}^D d_b = [D_a D_b - D_b D_a + T^c_{ab} D_c]$$

je pseudoderivace generovaná tenzorem křivosti F_{ab}

$$\mathbb{F}_{ab} \phi = i m F_{ab} \phi \qquad \text{pro } \phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^n M$$

$F_{ab} \in \mathcal{A}^2 M$ je nenabitý (náboj 0) reálný (hermit. v dim = 1)

pro $D = \partial + \mathcal{A}_a$ dané vekt. potenciálem A_a vůči ∂ máme

$$F_{mn} = {}^\partial d_m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nenabité} \\ {}^\partial d = d}}{A_n} + i \underbrace{[A_m, A_n]}_{\substack{0 \\ \text{plyne z dim}\,\mathbb{C} = 1}} = d_m A_n$$

kalibrační transformace kov. derivace

$\phi \to \tilde{\phi} = U^m \phi \qquad \phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^m M \qquad U = \exp(iu)$

$D_a \to \tilde{D}_a = D_a + \Lambda_a \qquad \Lambda_a$ generováno $i\Lambda_a$

$\tilde{D}$ je dáno podmínkou

$\widetilde{D\phi} = \tilde{D}\tilde{\phi} \underset{\text{obecná teorie}}{\Longrightarrow} i\Lambda = -(DU)\cdot U^{-1} = -i\,du$

$\Downarrow$

$\tilde{D}\phi = D\phi - im\,du\,\phi \qquad \phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^m M$

transformace vekt. potenciálu vůči fixní ∂

$A \to \tilde{A} = U\cdot A\cdot U^{-1} + i(\partial U)\cdot U^{-1}$ (obecná teorie)

$= A - du$

transformace tenzoru křivosti

$F \to \tilde{F} = U\cdot F\cdot U^{-1}$ (obecná teorie)

$= F$

většinou, A, F, U jsou náboje 0, tj. čísla, které komutují

Elektromagnetické pole jako kalibrační pole

M prostoročas s metrikou g_{ab} a Levi-Civitovou der. ∇_a

$\mathbb{C}^n M$ bundly nabitých polí náboje $n \in \mathbb{Z}$

$\phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^n M$ nabité pole

D_a kov. derivace na $\mathbb{C}^n M$ = kalibrační pole

D lze použít pro popis elektromagnetického pole

A_a vekt. potenciál D vůči trivializaci ∂

A_a je 4-potenciál EM pole

F_{ab} tenzor křivosti = Maxwellův tenzor EM pole

$$F_{ab} = d_a A_b$$

působení D na $\phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^n M$

$$D_a \phi = \partial_a \phi + i n A_a \phi$$

kalibrační transformace

$$\phi \to \tilde{\phi} = \exp(inu)\, \phi$$

$$D \to \tilde{D} = D - in\, du \qquad \text{při působení na } \mathbb{C}^n M$$

$$A_a \to \tilde{A}_a = A_a - d_a u$$

$$F_{ab} \to \tilde{F}_{ab} = F_{ab}$$

pohybové rovnice

$$F_{ab} = d_a A_b \qquad \Leftrightarrow \qquad d_a F_{bc} = 0$$

$$\nabla_m F^{am} = J^a$$

$$g^{mn} D_m D_n \phi - M^2 \phi = 0$$

$$J_a = in\left(\bar{\phi} D_a \phi - \phi D_a \bar{\phi}\right) \qquad \phi \in \mathrm{Sect}\, \mathbb{C}^n M$$