Opakování z Lieových algeber

G poloprostá Lieova grupa $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ poloprostá Lieova algebra

$\mathfrak{g}$ poloprostá $\Rightarrow$

ad věrná repr. $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}$

k nedegenerovaná metrika na $\mathfrak{g}$

$\mathrm{Der}\,\mathfrak{g} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$

$\rightarrow$ algebra operátorů tvaru ad_m $m \in \mathfrak{g}$

$\rightarrow$ algebra operátorů δ splňujících

$$\delta[m,n] = [\delta m, n] + [m, \delta n]$$

Vždy platí $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \subset \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ ($\Leftarrow$ Jacobiho identita)

pro poloprostou $\mathfrak{g}$ $\delta \in \mathrm{Der}\,\mathfrak{g} \Rightarrow \exists\, m \in \mathfrak{g}$ $\delta = \mathrm{ad}_m$

T reprezentace grupy G na vekt. prostoru A tj. $h \in G \to T_h \in A^1_1$

t odpovídající repr. alg. $\mathfrak{g}$ na vekt. prostoru A tj. $m \in \mathfrak{g} \to t_m \in A^1_1$

$\mathfrak{g}$ poloprostá, A konečně dimenzionální $\Rightarrow$

t je plně reducibilní reprezentace, tj.

$A = \bigoplus_{\kappa=0}^{K} A_\kappa$ $\quad P_\kappa$ projektor na A_κ

$t = \bigoplus_{\kappa=0}^{K} t_\kappa$ $\quad t_\kappa = P_\kappa \cdot t \cdot P_\kappa$ zúžení t na A_κ

kde $t_0 = 0$ triviální

$\kappa > 0$ t_κ ireducibilní

Schurovo lemma

$$\forall m \in \mathfrak{g} \quad [S, t_m] = 0 \quad \Rightarrow \quad S = S_0 + \sum_{\kappa=1}^{K} s_\kappa P_\kappa \qquad S_\kappa = P_\kappa S P_\kappa$$

tj. na každé ireducib. komponentě A_κ je S úměrné jednotce P_κ na A_κ

na A_0 je S neurčené

Vše lze přímočaře zmodifikovat pro redukovatelnou alg. $\mathfrak{g}$

tj. pro algebru splňující

$A = Z \oplus S$ $\quad Z$ centrum A $\quad S$ poloprostá

Lokální kalibrační grupa a algebra

Def: Lokální kalibrační grupa a algebra

Nechť G je Lieova grupa a g její Lieova algebra
nechť M je podkladová varieta

GM je grupový bundle ~~ze~~ se standardní fibrou G
s grupovou strukturou indukovanou z G

gM je vektorový bundl se standardní fibrou g
se strukturou Lieovy algebry indukovanou z g
realizovaný jako $g_x M = T_e G_x M$ (tečný pr. $G_x M$ v e)
tj. máme Lieovy záv. a strukturní tenzor

$$[m, n]^\alpha = m^\mu n^\nu c_{\mu\nu}{}^\alpha \qquad m, n \in gM \quad c \in g^1_{[2]} M$$

a Killingovu metriku

$$k_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} c_{\alpha\mu}{}^\nu c_{\beta\nu}{}^\mu$$

Lokální kalibrační grupa je prostor řezů GM
$\quad Sect\, GM \qquad$ tj. $\quad h(x) \in G_x M \quad \forall x \in M$

Lokální kalibrační algebra je prostor řezů gM
$\quad Sect\, gM \qquad$ tj. $\quad m^\alpha(x) \in g_x M \quad \forall x \in M$

Věta

nechť G je (poj)prostá Lieova gr., g její Lieova algebra
a GM, gM příslušné fibrované bundly nad M

$\Downarrow$

adjoint reprezentace Ad je věrná ultralokální
reprezentace GM na gM

$$Ad_h : gM \to gM \qquad \text{tj.} \quad Ad_h \in Sect\, g^1_1 M \quad \text{pro } h \in Sect\, GM$$

$$Ad_{h_1 h_2} = Ad_{h_1} Ad_{h_2} \qquad Ad_{h^{-1}} = Ad_h^{-1}$$

strukturní tenzor je invariantní vůči Ad_h tj.

$$Ad_h [m, n] = [Ad_h m, Ad_h n] \quad \Leftrightarrow \quad Ad_h c = c$$

Věta

nechť G je polojednoduchá Lieova gr., g její Lieova algebra a GM, gM příslušné fibrované bundly nad M

⇓ adjoint reprezentace ad je věrná ultralokální reprezentace gM na gM

$$ad_m : gM \to gM \quad \text{tj} \quad ad_m \in \mathrm{Sect}\, g^1_1 M \quad \text{pro } m \in \mathrm{Sect}\, gM$$

kde

$$ad_m{}^\kappa{}_\chi = m^\alpha c_{\alpha\chi}{}^\kappa \quad \text{tj} \quad ad_m n = [m, n]$$

a platí

$$ad_m [n_1, n_2] = [ad_m n_1, n_2] + [n_1, ad_m n_2]$$

(plyne z Jacobiho identity, ekvivalentní $ad_m c = 0$)

z polojednoduchosti plyne, že každá lineární ultralokální operace δ splňující Leibniz. pravidlo

$$\delta [n_1, n_2] = [\delta n_1, n_2] + [n_1, \delta n_2]$$

musí být tvaru

$$\delta = ad_m \quad \text{pro nějaké } m \in \mathrm{Sect}\, gM$$

Def: Trivializace kompatibilní s kalibrační algebrou

nechť GM a gM jsou bundly kalibrační grupy a algebry. Trivializace gM kompatibilní s kalibrační algebrou je volba báze l_α v gM taková, že

$$c_{\alpha\beta}{}^\gamma = \text{konst} \quad (\text{na } M)$$

kde $c_{\alpha\beta}{}^\gamma$ jsou komponenty strukt. tenzoru v této bázi

$$[l_\alpha, l_\beta] = c_{\alpha\beta}{}^\gamma l_\gamma$$

Zřejmě též platí

$$k_{\alpha\beta} = \text{konst.}$$

Pozn:

Konstantnost $c_{\alpha\beta}{}^\gamma$ je míněna na podkladové varietě M. l_α lze samozřejmě též levoinvariantně rozšířit na $G_x M$ a pak budou komponenty strukt. tenz. konstantní i na $G_x M$

Kovariantní derivace na kalibrační algebře

Def: kov. der. konzistentní se strukturou kalibr. algebry
nechť gM je vektorový bundl kalibrační algebry
kovariantní der. D je konzistentní se strukt. kalibr. algebry pokud

$$Dc = 0$$

což je ekvivalentní podmínce

$$D[m,n] = [Dm,n] + [m,Dn]$$

(s užitím $[m,n]^\alpha = m^\mu n^\nu c_{\mu\nu}{}^\alpha$)

Lemma

D je konzistentní se strukt. kalibr. algebry
$\Downarrow$
$$Dk = 0$$

Důk: plyne z $k_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} c_{\alpha\mu}{}^\nu c_{\beta\nu}{}^\mu$ a $D_{\underline{m}} c_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$

Lemma

l_α je trivializace na kalibr. algebře gM a
∂ je příslušná souř. derivace $\quad \partial l_\alpha = 0$
$\Downarrow$
∂ je konzistentní se strukt. kalibr. algebry

$$\partial_{\underline{m}} c_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0 \qquad \partial_{\underline{m}} k_{\alpha\beta} = 0$$

Důk:
plyne z $\quad c_{\alpha\beta}{}^\gamma = c_{\mu\nu}{}^\rho\, l^\mu_\alpha\, l^\nu_\beta\, l^\gamma_\rho \quad$ a

$\partial_{\underline{m}} l^\alpha_\rho = 0 \quad \partial_{\underline{m}} l^\rho_\alpha = 0 \qquad c_{\mu\nu}{}^\rho = \text{konst.} \qquad$ kde l^μ_α je duální k l^α_μ

Věta Rozdíl kov. der. na $\mathfrak{g}M$

nechť $D, \tilde{D}$ jsou kov. derivace konzist. s kal. algebrou

rozdílový tenzor $A_{\underline{m}}{}^{k}{}_{\underline{l}}$ generující pseudoderivaci

$$\mathbb{A}_{\underline{m}} = D_{\underline{m}} - \tilde{D}_{\underline{m}}$$

splňuje

$$A_{\underline{a}} \cdot [m, n] = [A_{\underline{a}} \cdot m, n] + [m, A_{\underline{a}} \cdot n]$$

(kde vynecháváme indexy na $\mathfrak{g}M$)

pro poloprostou algebru $\mathfrak{g}$ existuje $\mathcal{R}_{\underline{a}}{}^{k} \in \mathrm{Sect}\, \mathfrak{g} \otimes T^*M$ tak

$$A_{\underline{a}}{}^{k}{}_{\underline{x}} = \mathrm{ad}_{\mathcal{R}_{\underline{a}}}{}^{k}{}_{\underline{x}} = \mathcal{R}_{\underline{a}}{}^{k}\, c_{k\underline{x}}{}^{k}$$

Důk:

D i $\tilde{D}$ splňují Leibniz. pravidlo, tj. i $\mathbb{A}$

$$\mathbb{A}_{\underline{a}} [m, n] = [\mathbb{A}_{\underline{a}} m, n] + [m, \mathbb{A}_{\underline{a}} n]$$

akce pseudoderivace $\mathbb{A}_{\underline{a}}$ na $\mathfrak{g}M$ je pomocí $A_{\underline{a}}$ $\mathbb{A}_{\underline{a}} m = A_{\underline{a}} \cdot m$

pro poloprostou alg. máme $\mathrm{Der}\, \mathfrak{g} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$

Věta

nechť ∂ je souř. derivace trivializace kalibr. algebry a

$A_{\underline{a}}{}^{k}{}_{\underline{x}}$ je nekt. potenciál vygenerovaný z $\mathcal{R}_{\underline{a}}{}^{m} \in \mathrm{Sect}\, \mathfrak{g} \otimes T^*M$

$$A_{\underline{a}}{}^{k}{}_{\underline{x}} = \mathcal{R}_{\underline{a}}{}^{k}\, c_{k\underline{x}}{}^{k} \qquad \text{tj.} \quad A = \mathrm{ad}_{\mathcal{R}}$$

pak kov. derivace

$$D = \partial + \mathbb{A}$$

je konzistentní se strukturou kalibr. algebry

Důk:

∂ i $\mathbb{A}$ splňují Leibniz. pravidlo, tedy i D

Akce D na $\mathfrak{g}M$ lze tak psát

$B^k \in \mathrm{Sect}\, \mathfrak{g}M$

$$D_a B^k = \partial_a B^k + [\mathcal{A}_a, B]^k \longleftarrow \text{Lieova závorka}$$

$B^\kappa{}_\nu \in \mathrm{Sect}\, \mathfrak{g}^1_1 M \qquad B^\kappa{}_\nu = B^k c_{k\nu}{}^\kappa \qquad$ tj. $B = \mathrm{ad}_B$

$$D_a B^\kappa{}_\nu = \partial_a B^\kappa{}_\nu + \underbrace{[A_a, B]^\kappa{}_\nu}_{\text{komutátor}} = (\partial_a B^k + \underbrace{[\mathcal{A}_a, B]^k}_{\text{Lieova závorka}}) c_{k\nu}{}^\kappa$$

Věta: Tenzor křivosti na kalibrační algebře

D_a kov. der. konzistentní s kalibr. algebrou

$F_{ab}{}^\kappa{}_\nu$ tenzor křivosti D_a

platí

$\mathbb{F}_{ab}\, c = 0 \qquad$ tj. $\qquad F_{ab}\cdot[m, n] = [F_{ab}\cdot m, n] + [m, F_{ab}\cdot n]$

pro poloprostou algebru $\mathfrak{g}$ existuje $\mathcal{F}_{ab}{}^k$ takové, že

$F_{ab}{}^\kappa{}_\nu = \mathcal{F}_{ab}{}^k c_{k\nu}{}^\kappa \qquad$ tj. $\qquad F = \mathrm{ad}_{\mathcal{F}}$

Důk.

$Dc = 0 \Rightarrow DDc = 0 \Rightarrow \mathbb{F}c = 0 \Rightarrow F_{ab}{}^k{}_\lambda c_{\mu\nu}{}^\lambda - F_{ab}{}^\lambda{}_\mu c_{\lambda\nu}{}^k - F_{ab}{}^\lambda{}_\nu c_{\mu\lambda}{}^k = 0$

$\Rightarrow F\cdot[m, n] = [F\cdot m, n] + [m, F\cdot n] \qquad$ díky $[m, n]^k = m^\mu n^\nu c_{\mu\nu}{}^k$

Příklady akce operátoru křivosti:

$\mathbb{F}_{ab} B^k = F_{ab}{}^k{}_\lambda B^\lambda = [\mathcal{F}_{ab}, B]^k \qquad\qquad B^\kappa{}_\nu = B^k c_{k\nu}{}^\kappa$

$\mathbb{F}_{ab} B^\kappa{}_\nu = [F_{mn}, B]^\kappa{}_\nu = [\mathcal{F}, B]^k c_{k\nu}{}^\kappa$

Věta:

D kov. der. na gM daná potenciálem $A = \mathrm{ad}_{\mathfrak{A}}$ vůči trivializaci ∂ a $F = \mathrm{ad}_{\mathfrak{F}}$ je tenzor křivosti D vůči konzistentní se strukt. kalibrační algebry

$\Downarrow$

$$F_{ab}{}^{\mu}{}_{\nu} = \overset{\partial}{d}_a A_b{}^{\mu}{}_{\nu} + [A_a, A_b]^{\mu}{}_{\nu} = \partial_a \wedge A_b{}^{\mu}{}_{\nu} + [A_a, A_b]^{\mu}{}_{\nu}$$

$$\mathfrak{F}_{ab}{}^{\kappa} = \overset{\partial}{d}_a \mathfrak{A}_b{}^{\kappa} + [\mathfrak{A}_a, \mathfrak{A}_b]^{\kappa} = \partial_a \wedge \mathfrak{A}_b{}^{\kappa} + [\mathfrak{A}_a, \mathfrak{A}_b]^{\kappa}$$

kde v druhých výrazech jsme rozšířili ∂ na $\mathbb{T}^*M$ pomocí derivace bez torze (např. Levi-Civit. der. ∇)

Důk:

první řádek je obecné formule pro tenzor křivosti na vekt. bundlu

druhý řádek plyne z

$$F_{ab}{}^{\mu}{}_{\nu} = \mathfrak{F}_{ab}{}^{\kappa} c_{\kappa\nu}{}^{\mu} \qquad A_a{}^{\mu}{}_{\nu} = \mathfrak{A}_a{}^{\kappa} c_{\kappa\nu}{}^{\mu}$$

$\partial_a c_{\mu\nu}{}^{\kappa} = 0$ a Jacobiho identita $\Rightarrow [\mathrm{ad}_{\mathfrak{A}}, \mathrm{ad}_{\mathfrak{B}}] = \mathrm{ad}_{[\mathfrak{A},\mathfrak{B}]}$