Asociované vektorové bundly

Def

Nechť G je Lieova grupa, g její Lieova algebra,
A vektorový prostor, T reprezentace G na A a t reprez. g na A
AM je vekt. bundl asociovaný s grupovým bundlem GM
a bundlem gM pokud se lokálně přenášejí
struktury mezi standardními fibry G, g, A
[ve smyslu mnemonického isomorfismu
$GU \cong G \times U \qquad gU \cong g \times U \qquad AU \cong A \times U \qquad U \subset M$]

To znamená, že existuje zobrazení

$h \in \mathrm{Sect}\, GM \quad \rightarrow \quad T_h \in \mathrm{Sect}\, A^1_1 M$ splňující

$$T_{h_1 h_2} = T_{h_1} \cdot T_{h_2} \qquad T_{h^{-1}} = T_h^{-1} \qquad T_e = \mathbb{1}$$

$m \in \mathrm{Sect}\, gM \quad \rightarrow \quad t_m \in \mathrm{Sect}\, A^1_1 M \qquad t_m{}^A{}_B = m^\gamma t_\gamma{}^A{}_B$

$$t_{[m_1, m_2]} = [t_{m_1}, t_{m_2}] \qquad t_m = \frac{d}{d\varepsilon} T_{h_\varepsilon} \quad \text{kde} \quad m = \frac{Dh_\varepsilon}{d\varepsilon}$$

T nazýváme akce kalibrační grupy na AM
t nazýváme akce kalibrační algebry na AM
$t_\gamma{}^A{}_B$ jsou generátory reprezentace na AM

Def

Akce T, resp. t na AM je konzistentní s metrickou strukturou $H_{\underline{AB}}$ na AM pokud

$$T_h{}^M{}_{\underline{A}} T_h{}^N{}_{\underline{B}} H_{\underline{MN}} = H_{\underline{AB}} \qquad t_F^\dagger = - t_F$$

Pozn:

Podobně zavedeme asociaci komplexních vekt. bundlů a konzistenci reprezentací s hermitovskou strukturou případně jinou strukt. jako např. orientace

Def: Trivializace na asociovaném bundlu

Nechť AM je vekt. bundl asociovaný s bundly GM, gM

Trivializace e_α na gM a E_A na AM jsou konzistentní s asociací pokud

$c_{\mu\nu}{}^{\kappa} = \text{konst}$ - konzistence s lieovskou str. gM

$t_\mu{}^A{}_B = \text{konst}$ - konzistence s asociací AM a gM

v případě reprezentace konzist. s dodatečnou strukturou, požadujeme obdobně konzistenci trivializace

např. pro reprezentaci konzist. s metrikou H požadujeme též

$H_{AB} = \text{konst}$ - konzistence s metrikou na AM

Všechny komponenty jsou vzhledem k bázím trivializace konstantní

Konstantnost je myšlena podél podkladové variety M

Lema: Jednoznačnost trivializace na asociovaném bundlu

Nechť AM je vekt. bundl asociovaný s bundly GM, gM
nechť G a g jsou poloprosté
t je ireducibilní reprezentace konzistentní s metrikou H
Nechť e_α a E_A jsou trivializace konzistentní s asociací s lieovskou strukturou a s metrikou

Pak volba báze e_α a konkrétních konst. koeficientů $t_\Gamma{}^A{}_B$ a H_{AB} určuje volbu báze E_A jednoznačně až na triviální volnost $E_A \to -E_A$

Důk:

nechť E_A, $\tilde{E}_A$ jsou dvě báze na AM splňující všechny podmínky výše
pak máme

$$\tilde{E}_A = E_B \Lambda^B{}_A \qquad \text{kde } \Lambda^B{}_A \text{ je ortonormální}$$

$$\Lambda_M{}^A \Lambda^M{}_B = \mathbb{1}^A_B \qquad \text{kde } \Lambda_B{}^A = H_{BN} \Lambda^N{}_M H^{MA}$$

(plyne z konzistence s metrikou)

Z konzistence s asociací plyne

$$t_K{}^A{}_B = t_M{}^{\tilde{A}}{}_{\tilde{B}} \Rightarrow t_K{}^A{}_B = \Lambda^A{}_M t_K{}^M{}_N \Lambda^{-1N}{}_B \Rightarrow [t_\Gamma, \Lambda]^A{}_B = 0$$

Z ireducibility a Schurova lemma plyne

$$\Lambda^A{}_B = \lambda \mathbb{1}^A_B$$

Ortonormalita Λ dává

$$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \qquad \Lambda = \pm \mathbb{1}$$

Poznámka:

pro věrnou reprezentaci poloprosté alg. na vekt. pr. máme plnou reducibilitu. Tj. reprezentační prostor se rozpadá na součet ireducibilních komponent.
V obecném případě tak máme volnost v trivializaci na AM danou volbou znaménka na každé ireducibilní komponentě.

Indukovaná kovariantní derivace na asociovaném bundlu

Def: Derivace na asociovaném bundlu

Nechť AM je vekt. bundl asociovaný s bundly GM, gM

$\mathcal{D}$ je derivace na gM a D je derivace na AM

$\mathcal{D}$ a D jsou konzistentní s asociací, pokud platí

$\mathcal{D}_{m} c_{\mu\nu}{}^{\kappa} = 0$ (též $\mathcal{D}_{m} k_{\mu\nu} = 0$) - $\mathcal{D}$ konz. s gM

$D_{m} H_{AB} = 0$ - D konz s metr. na AM

$D_{m} t_{F}{}^{A}{}_{B} = 0$ - konzistence s asociací

Poslední podmínce je $D = \mathcal{D} \oplus D$ rozšířená derivace na bundl $g \otimes A M$

Pozn:

Podobnou def. lze zformulovat i pro jiné struktury na AM např. hermitovskou strukt. $h_{\bar{A}A}$ či orientaci $\varepsilon_{A_1 A_2 \dots}$

Lema: Jednoznačnost souřadnicové derivace

Nechť AM je vekt. bundle asociovaný s bundly GM, gM
t věrná reprezentace
e_α a E_A trivializace na gM a AM konzist. s asociací

Pak souřadnicová derivace ∂ na AM je dána jednoznačně

Důk:

podle věty a poznámky dříve je báze E_A dána jednoznačně až na volbu znaménka na každé ireducibilní kompon.
(Věrná konečnědimenz. reprezentace polojednoduché algebry je plně reducibilní bez triviální komponenty. Pro každou ireduc. komponentu máme volnost ve volbě báze pouze znaménko.)
Souřadnicová derivace ∂ na AM je dána podmínkou
$\partial E_A = 0$
Ta identifikuje stejnou derivaci ∂ nezávisle na volbě (konstantního) znaménka.

Lema Konzistence souřadnicové derivace s asociací

Nechť AM je vekt. bundle asociovaný s bundly GM, gM
e_α, E_A trivializace na gM a AM konzistentní s asociací

Souřadnicové derivace ∂ na gM a ∂ na AM dané trivializací jsou konzistentní s asociací, tj.

$$\partial c = 0 \qquad \partial H = 0 \qquad \partial t = 0$$

Důk:

$$\partial e_\alpha = 0 \qquad \partial E_\alpha = 0 \qquad c_{\mu\nu}{}^{\kappa} = \text{konst} \qquad H_{AB} = \text{konst} \qquad t_\mu{}^A{}_B = \text{konst}$$

$$\Rightarrow \partial c = 0 \qquad \partial H = 0 \qquad \partial t = 0$$

Věta: Indukovaná kov. der. na asociovaný bundl

Nechť AM je vekt. bundl asociovaný s GM, gM

t je věrná repr. konzistentní s metrikou H na AM

$\mathcal{D}$ kov. derivace na gM konzist. se strukturou algebry

$\Downarrow$

kov. der. D na AM konzistentní s asociací a metrikou je dána jednoznačně

Důk.

Derivace $\mathcal{D}$ a D mají splňovat

$$\mathcal{D}c = 0 \qquad DH = 0 \qquad Dt = 0$$

Zvolme trivializace e_α, E_A konzist. se všemi strukt., pak

$$\partial c = 0 \qquad \partial H = 0 \qquad \partial t = 0$$

a ∂ na AM je dána volbou e_α jednoznačně

Nechť $\mathcal{A}_a{}^\kappa{}_\nu = \Omega_a{}^\kappa c_{\kappa\nu}{}^\kappa$ je vekt. potenciál $\mathcal{D}$ vůči ∂ a

$A_a{}^M{}_N$ je vekt. potenciál D vůči ∂

$$\mathcal{D} = \partial + \mathcal{A} \qquad D = \partial + A$$

Platí

$$D_a t_\kappa{}^M{}_N = 0 \qquad \partial_a t_\kappa{}^M{}_N = 0$$

$\Downarrow$

$$-\mathcal{A}_a{}^\lambda{}_\kappa t_\lambda{}^M{}_N + [A_a, t_\kappa]^M{}_N = 0$$

$\Downarrow$

$$-\Omega_a{}^\nu c_{\nu\kappa}{}^\lambda t_\lambda{}^M{}_N + [A_a, t_\kappa]^M{}_N = 0 \qquad c_{\nu\kappa}{}^\lambda t_\lambda = [t_\nu, t_\kappa]$$

$\Downarrow$

$$[A_a - \Omega_a{}^\nu t_\nu, t_\kappa]^M{}_N = 0$$

Z věrnosti a plné reducibility repr. plyne Schurovo lemma

$$A_a{}^M{}_N - \Omega_a{}^\nu t_\nu{}^M{}_N = \sum_s \pi_a^{(s)} P_{(s)}{}^M{}_N$$ projektory na ireduc. komp.

Z $DH=0$ $\partial H=0$ a konzistence t s H plyne

$$A_a^T = -A_a \qquad t_\kappa^T = -t_\kappa$$

ale projektory $P_{(s)}$ jsou symetrické $P_{(s)}^T = P_{(s)}$

$\Rightarrow \pi_a^{(s)} = 0 \Rightarrow A_a{}^M{}_N = \Omega_a{}^\kappa t_\kappa{}^M{}_N \Rightarrow D = \partial + A$ jednoznačné

Pozn.:

Poloprostota grupy G a algebry $\mathfrak{g}$ zaručuje, že adjoint reprezentace Ad a ad na $\mathfrak{g}M$ nesou veškerou podstatnou informaci o grupě, resp. algebře – jsou věrné nedegenerované. Navíc každé lineární operace splňující Leibnizovo pravidlo patří do reprezentace, $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$

Poloprosté grupy nepokrývají ale běžný případ, kdy grupa má invariantní komutující podgrupu, případně algebra má komutující ideál. To zahrnuje např. případ elektromagnetismu, kdy kalibrační grupa je $U(1)$. Adjoint reprezentace je poté triviální, $\mathrm{ad} = 0$ jelikož závorky jsou triviální, $c = 0$.

Tento případ se řeší umělou volbou nějaké netriv. věrné reprezentace G či $\mathfrak{g}$ na kalibr. algebře $\mathfrak{g}$, např. zadání generátorů $t_{\underline{K}}{}^{\underline{L}}{}_{\underline{Y}}$ splňujících $[t_{\underline{K}}, t_{\underline{L}}] = 0$. Tato reprezentace pak nahradí adjoint reprezentaci ve výrazech jako

$$A_{\underline{a}}{}^{\underline{L}}{}_{\underline{Y}} = \mathcal{A}_{\underline{a}}^{\underline{K}}\, t_{\underline{K}}{}^{\underline{L}}{}_{\underline{Y}} \qquad \text{či} \qquad F_{\underline{ab}}{}^{\underline{L}}{}_{\underline{Y}} = \mathcal{F}_{\underline{ab}}^{\underline{K}}\, t_{\underline{K}}{}^{\underline{L}}{}_{\underline{Y}}$$

Zkombinováno s technikou pro poloprostou algebru lze ošetřit případ redukovatelné algebry $\mathfrak{g}$.

Pozn:

Důkaz jednoznačnosti jak souřadnicové derivace ∂ na AM, tak indukované derivace D na AM spočívá zejména na věrnosti a reducibilitě reprezentace t. To umožňuje použít Schurovo lema a zredukovat volnost v definici trivializace E_A, případně volnost ve tvaru rozdílu $A_a - \Omega_a^k t_k$ na násobek jednotky na každé ireducibilní komponentě.

Tuto zbývající volnost jsme eliminovali použitím kompatibility s metrickou strukturou na AM.

V případě, že na asociovaném prostoru AM bude reprezentace t kompatibilní s jinou strukturou – např. s hermitovskou strukturou na komplexních bundlech – eliminace zbývající volnosti nemusí být tak přímočará. Hermitovská struktura by např. nefixovala fázi na jednotlivých ireducibilních komponentách

Pozn:

Obecnější přístup k zachycení informace o kalibrační grupě, algebře a k definici asociovaných vektorových bundlů je založen na tzv. hlavních bundlech.

Intuitivně, hlavní bundl PM je prostor všech zobecněných bází, mezi kterými lze přecházet pomocí kalibrační transformace.

Tj. prvek fibru $E \in P_x M$ je zobecněná báze v x.

Na každou bázi E lze zapůsobit transformací $h \in G$ patřící do kalibrační grupy G

$$E \to F = Eh \quad \in P_x M$$

Naopak, každé dvě báze $E, F \in P_x M$ jsou spojeny nějakou kalibrační transformací h

Asociovaný bundl AM je definován volbou reprezentace T grupy G na standardní fibru A

Prvek $\phi \in AM$ lze chápat jako obecný objekt, který je zadaný vůči bázi $E \in PM$ pomocí souřadnice $\underline{\phi} \in A$ ze standardního fibru

$$\phi = T_E \underline{\phi}$$

přičemž pokud změním bázi $E \to E' = Eh$, musím změnit příslušně i souřadnici $\underline{\phi} \to \underline{\phi}' = T_{h^{-1}} \underline{\phi}$

$$\phi = T_E \underline{\phi} = T_{E'} \underline{\phi}' = T_{Eh}(T_{h^{-1}} \underline{\phi})$$

Grupový bundl GM a bundl kalibr. algebry gM lze chápat jako asociované bundly zadané pomocí reprezentací AD a Ad

Na hlavním bundlu PM lze definovat konexi, které definuje paralelní přenos bází.

Konexe PM pak umožňuje definovat jednoznačně indukovanou kovariantní derivaci na každém asociovaném vektorovém bundlu

Viz příležitostné přednášky v rámci Vybraných partií OTR.