Invariantní symetrické polynomy

vekt. bundle $\mathbb{E}M$ $\quad T_{g}{}^{A}{}_{B}$ $\quad t_{\alpha}{}^{A}{}_{B}$

Lieova alg. gM $\quad Adg^{A}{}_{B}$ $\quad ad_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\nu} = c_{\alpha\nu}{}^{\mu}$

reprezentace gM na $\mathbb{E}M$ – prvky z $\mathbb{E}^1_1M$ tvaru:

$$X^{A}{}_{B} = \mathcal{X}^{\alpha} t_{\alpha}{}^{A}{}_{B} \qquad X \in \mathbb{E}^1_1 M \quad \mathcal{X} \in gM$$

1) multilin. zobr. stupně ε

$$P(X_1, \dots, X_\varepsilon) = P^{B_1}_{A_1} \dots {}^{B_\varepsilon}_{A_\varepsilon} X_1{}^{A_1}{}_{B_1} \dots X_\varepsilon{}^{A_\varepsilon}{}_{B_\varepsilon}$$

$$P(\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_\varepsilon) = P_{\alpha_1 \dots \alpha_\varepsilon} \mathcal{X}^{\alpha_1} \dots \mathcal{X}^{\alpha_\varepsilon}$$

$$P_{\alpha_1 \dots \alpha_\varepsilon} = t_{\alpha_1}{}^{A_1}{}_{B_1} \dots t_{\alpha_\varepsilon}{}^{A_\varepsilon}{}_{B_\varepsilon} P^{B_1}_{A_1} \dots {}^{B_\varepsilon}_{A_\varepsilon}$$

2) symetrie

$$P(\dots X_i \dots X_j \dots) = P(\dots X_j \dots X_i \dots) \qquad \forall i,j$$

$$P_{\alpha_1 \dots \alpha_\varepsilon} = P_{(\alpha_1 \dots \alpha_\varepsilon)}$$

3) ~~polynomy~~ mocnina = homogenní polynom

$$P(X) = P(X, \dots, X) \qquad \text{pro sym. } P$$

ekvivalentní informace

$$P(X_1 \dots X_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon!} \frac{\partial^\varepsilon}{\partial \tau_1 \dots \partial \tau_\varepsilon} P(\tau_1 X_1 + \dots \tau_\varepsilon X_\varepsilon)$$

nehomogenní polynom

$$P(X) = \sum_\varepsilon P_\varepsilon(X) \qquad P_\varepsilon \text{ sym. stupně } \varepsilon$$

(výhoda 1-argum. zápisu)

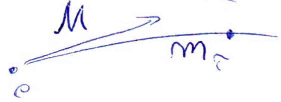
symetrický součin

$$(P \circ Q)(X) = P(X)\, Q(X)$$

$$(P \circ Q)(X_1 \dots X_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!} \sum_\sigma P(X_{\sigma_1} \dots X_{\sigma_p})\, Q(X_{\sigma_{p+1}} \dots X_{\sigma_{p+q}})$$

$$(P \circ Q)_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+q}} = P_{(\alpha_1 \dots \alpha_p} Q_{\alpha_{p+1} \dots \alpha_{p+q})}$$

4) invariance vůči akci gr.



$$\mathbb{M} = \mathcal{M}\cdot t = t_{\mathcal{M}}$$
$$\mathcal{M} = \mathcal{M}\cdot ad = ad_{\mathcal{M}}$$

$$X \to \tilde{X} = T_{m_\tau} \cdot X \cdot T_{m_\tau}^{-1} \approx X + \tau [M, X]$$
$$\mathcal{X} \to \tilde{\mathcal{X}} = Ad_{m_\tau} \mathcal{X} \approx \mathcal{X} + \tau [\mathcal{M}, \mathcal{X}] = \mathcal{X} + \tau \mathcal{M} \cdot \mathcal{X}$$

$$P(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k) = P(X_1, \dots, X_k)$$

ekvivalentní podm. v prvním řádu

$$\mathbb{M} P = 0 \qquad \text{resp.} \qquad \mathcal{M} P = 0$$

Důk: inv. v 1. řádu $\Rightarrow$

$$0 = P([M, X_1], X_2, \dots) + P(X_1, [M, X_2], \dots) + \dots$$
$$= P^{B_1 B_2 \dots}_{A_1 A_2 \dots} (M^{A_1}{}_N X^N_{1\,B_1} - X^{A_1}_{1\,N} M^N{}_{B_1}) X_2{}^{A_2}{}_{B_2} \dots + P^{B_1 B_2 \dots}_{A_1 A_2 \dots} X^{A_1}_{1\,B_1} (M^{A_2}{}_N X^N_{2\,B_2} - X^{A_2}_{2\,N} M^N{}_{B_2}) \dots$$
$$= (-\mathbb{M} P)^{B_1 B_2 \dots}_{A_1 A_2 \dots} X^{A_1}_{1\,B_1} X^{A_2}_{2\,B_2} \dots = -\mathbb{M} P(X_1, \dots, X_k)$$

$$0 = P([\mathcal{M}, \mathcal{X}_1], \mathcal{X}_2, \dots) + P(\mathcal{X}_1, [\mathcal{M}, \mathcal{X}_2], \dots) + \dots$$
$$= P_{\alpha_1 \alpha_2 \dots} \mathcal{M}^{\alpha_1}{}_\nu \mathcal{X}^\nu_1 \mathcal{X}^{\alpha_2}_2 \dots + P_{\alpha_1 \alpha_2 \dots} \mathcal{X}^{\alpha_1}_1 \mathcal{M}^{\alpha_2}{}_\nu \mathcal{X}^\nu \dots + \dots$$
$$= -(\mathcal{M} P)_{\alpha_1 \alpha_2} \mathcal{X}^{\alpha_1}_1 \mathcal{X}^{\alpha_2}_2 \dots = -\mathcal{M} P(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots)$$

5) konstantnost

kov. der. splňující $Dc = 0 \qquad Dt = 0$

předpokládejme

$$DP = 0 \qquad \mathcal{D} P = 0$$

stačí splnit pro jednu der., např. triv. ∂

$$\partial P = 0 \Rightarrow DP = \partial P + \mathbb{A} P = 0$$

Poznámka

P je tvořeno pomocí

c, t, kontrakcí

Př: $str_k(X_1, \dots, X_k) = \frac{1}{k!} \sum_\sigma tr(X_1 \cdots X_k) \rightsquigarrow str_k \qquad k \sim str_k$

rozšíření na formy na M

$$X \in \Lambda^p \otimes \mathfrak{g}\, M \qquad X \in \Lambda^p \otimes E^1_1 M$$

$$X_{a_1 \dots a_p}^{\alpha} \qquad\qquad X_{a_1 \dots a_p}{}^{A}{}_{B}$$

$$\hat{P}(X_1, X_2 \dots) \equiv P(X_1 \wedge X_2 \wedge \dots)$$

$$= X_1{}^{A_1}{}_{B_1} \wedge X_2{}^{A_2}{}_{B_2} \wedge \dots \; P^{B_1 B_2 \dots}{}_{A_1 A_2 \dots}$$

$$\hat{P}(X_1, X_2 \quad) \equiv P(X_1 \wedge X_2 \wedge \quad)$$

$$= X_1^{\alpha_1} \wedge X_2^{\alpha_2} \wedge \dots \; P_{\alpha_1 \dots \alpha_r}$$

$\wedge$ je skew-symetric $\quad \omega \wedge \sigma = (-1)^{pq} \sigma \wedge \omega$!

$\hat{P}_r(X)$ netriviální pouze pro X sudou

$$\hat{P}_r(X) = X^{\alpha_1} \wedge X^{\alpha_2} \wedge \dots \; P_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}$$

$$= (-1)^{x} X^{\alpha_2} \wedge X^{\alpha_1} \wedge \dots \; P_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}$$

prohození $X^{\alpha_1} \wedge X^{\alpha_2} \to X^{\alpha_2} \wedge X^{\alpha_1}$

$$= (-1)^{x} X^{\alpha_1} \wedge X^{\alpha_2} \wedge \; P_{\alpha_1 \alpha_2}$$

přeznačení indexů α_1, α_2 + symetrie $P_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}$

součin

- v bundle indexech symetrický
- v base indexech skew-symetrický

Chern-Weilove věta

D kov. der. na $\mathfrak{g}M$ s křivostí $\mathcal{F}$
na EM s křivostí F

$\mathcal{P}, P$ inv. sym. polynom na $\mathfrak{g}M$ resp E, M

1) $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{F})$, resp. $\hat{P}(F)$ jsou uzavřené, tj.
$d\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{F}) = 0 \qquad d\hat{P}(F) = 0$

2) $D, \tilde{D}$ dvě kov. der. na EM s křiv $F, \tilde{F}$
$\hat{P}(\tilde{F}) - \hat{P}(F)$ je exaktní, tj.
$\hat{P}(\tilde{F}) - \hat{P}(F) = d\,TP(\tilde{D}, D)$

TP je forma transgrese

Důkaz 1) P homogenní

$$d\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{F}) = D\wedge\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{F},\mathcal{F},\dots)$$
$$= \underbrace{\widehat{D\mathcal{P}}}_{0 \leftarrow \text{konst } P}(\mathcal{F},\mathcal{F},\dots) + \hat{\mathcal{P}}(\underbrace{D\wedge\mathcal{F}}_{0 \leftarrow \text{Bianchi}},\mathcal{F},\dots) + \hat{\mathcal{P}}(\mathcal{F},D\wedge\mathcal{F},\dots) + \dots$$
$$= 0$$

v složkách

$$\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{F}) = P_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}\,\mathcal{F}^{\alpha_1}\wedge\mathcal{F}^{\alpha_2}\wedge\dots\wedge\mathcal{F}^{\alpha_k}$$

* vsuvka o spojeních

A, B, Δ 1-formy s hodnotami v $E^1_1 M$, tj. $\Delta_m{}^A{}_B$

$[\ ,\ ]$ komutátor ve fibrových indexech

$\wedge$ vnější násobení v prostoročasových indx.

$\cdot$ kontrakce ve fibrových indx.

platí:

$$[A_m, B_n] = A_m \cdot B_n - B_n \cdot A_m \neq A_m \wedge B_n = A_m \cdot B_n - A_n \cdot B_m$$

pozor!!!

$$[A_m \overset{\wedge}{,} B_n] = A_m \wedge B_n - B_n \wedge A_m = A_m \cdot B_n - A_n \cdot B_m - B_n \cdot A_m + B_m \cdot A_n$$

$$= (A \wedge B + B \wedge A)_{mn} = [A_m, B_n] + [B_m, A_n]$$

$$[\Delta_m, \Delta_n] = \Delta_m \cdot \Delta_n - \Delta_n \cdot \Delta_m = \Delta_m \wedge \Delta_n = \Delta^{\wedge 2}_{mn}$$

$$[\Delta_m \overset{\wedge}{,} \Delta_n] = 2[\Delta_{[m}, \Delta_{n]}] = \Delta_m \wedge \Delta_n - \Delta_n \wedge \Delta_m = 2\Delta_m \wedge \Delta_n = 2\Delta^{\wedge 2}_{mn}$$

Důkaz 2)

$\tilde{D}, D$ kov. der na $\mathbb{E}M$

$\Delta = \tilde{D} - D$

$\tilde{F} = F + D\wedge\Delta + \underbrace{[\Delta,\Delta]}_{\Delta^{\wedge 2}}$

$D_\tau = \tau\tilde{D} + (1-\tau)D = D + \tau\Delta = \tilde{D} - (1-\tau)\Delta$

$F_\tau = \tau\tilde{F} + (1-\tau)F - \tau(1-\tau)\Delta^{\wedge 2} =$

$= \underline{F + \tau D\wedge\Delta + \tau^2\Delta^{\wedge 2}} = \tilde{F} - (1-\tau)\tilde{D}\wedge\Delta + (1-\tau)^2\Delta^{\wedge 2}$

$\frac{\partial}{\partial\tau} D_\tau = \Delta$

$\frac{\partial}{\partial\tau} F_\tau = \tilde{F} - F + (1-2\tau)\Delta^{\wedge 2} = \underline{D\wedge\Delta + 2\tau\Delta^{\wedge 2}} = \tilde{D}\wedge\Delta - 2(1-\tau)\Delta^{\wedge 2}$

$= \underline{D_\tau\wedge\Delta} \longleftarrow = \underline{D\wedge\Delta + [\tau\Delta,\Delta]} = \tilde{D}\wedge\Delta - [(1-\tau)\Delta,\Delta]$

$*$ (vsuvka o součinech)

$\frac{\partial}{\partial\tau}\hat{P}(F_\tau) = r\,\hat{P}(\frac{\partial}{\partial\tau}F_\tau, F_\tau, \dots) = r\,\hat{P}(D_\tau\wedge\Delta, F_\tau, \dots) =$

pomocná symetrie

$= r\, D_\tau\wedge\hat{P}(\Delta, F_\tau, \dots) = r\, d\,\hat{P}(\Delta, F_\tau, \dots)$

konst. P a $D_\tau\wedge F_\tau = 0$

pro polynomiální $P(X) = \sum_r P_r(X)$ definujeme

$P'(\Delta, X) = \sum_r r\, P_r(\Delta, X, \dots, X) =$

$= \sum_r \left(P_r(\Delta, X, \dots X) + P_r(X, \Delta, \dots, X) + \dots + P_r(X, X, \dots \Delta)\right)$

lze rozšířit na formy, X sudé, Δ libovolné

$\Downarrow$

$\frac{\partial}{\partial\tau}\hat{P}(F_\tau) = d\,\hat{P}'(\Delta, F_\tau)$

$\hat{P}(\tilde{F}) - \hat{P}(F) = d\int_0^1 \hat{P}'(\Delta, F_\tau)\, d\tau$

$\Downarrow$

forma transgrese

$TP(\tilde{D}, D) = \int_0^1 \hat{P}'(\Delta, F_\tau)\, d\tau$

Charakteristické třídy

P inv. sym. polynom

charakter. třída odpovídající P

$$p = [\hat{P}(F)] \in \mathcal{H}(M)$$

- je prvek kohomologické grupy $\mathcal{H}(M)$
- nezávisí na volbě D
- pro P homogenní stupně r je p 2r-forma
- pro P nehomogenní označujeme p_{2k} hom. komp.

ověřeno, podle Chern-Weilovy věty

$$d\hat{P}(F) = 0$$

$$\hat{P}(\tilde{F}) = \hat{P}(F) + d\,TP(\tilde{D}, D)$$

$$\Rightarrow [\hat{P}(\tilde{F})] = [\hat{P}(F)]$$

kde $[\omega] = \{\omega + d\alpha\}$ pro $d\omega = 0$

integrální charakteristiky (M kompaktní)

$$\int_M p \wedge q \wedge \ldots = \int_M \hat{P}(F) \wedge \hat{Q}(F) \wedge \ldots \qquad p \wedge q \wedge \ldots \text{ stupně } \dim M$$

↑ nezávisí na volbě reprezentanta

$$\int_M \hat{P}(\tilde{F}) \wedge \hat{Q}(F) \wedge \ldots = \int_M \hat{P}(F) \wedge \hat{Q}(F) \wedge \ldots + \overset{0}{\int_M d\,TP \wedge Q(F) \wedge \ldots}$$

$$\hookrightarrow \int_M d(TP \wedge Q(F) \wedge \ldots) = \int_{\partial M} TP \wedge Q(F) \wedge \ldots$$

při vhodném škálování dává celočíselné hodnoty.

Chernovy charakteristické třídy

D kov. der. na obecném (komplexním) bundle $\mathbb{E}\,M$

(může mít $U(n)$ strukturu či být $GL(n)$ reálný; pro $SO(n)$ ale degenerace $\to$ Pontrjaginovy třídy)

Obecná Chernova charakteristická třída je generována inv. sym. polyn.

$$\hat{C}(F) = \hat{\det}\left(\mathbb{1} + \frac{iF}{2\pi}\right)$$

$$c = [\hat{C}(F)] \qquad \text{leží} \quad c[M]$$

nehomogenní forma

Chernova charakt. třída stupně k - homog. komponenta obecné Chernovy třídy

$$\hat{C}(F) = 1 + \hat{C}_1(F) + \hat{C}_2(F) + \dots$$

$\hat{C}_k(F)$ homog. stupně k $\qquad$ $2k$-forma

$$c_k = [\hat{C}_k(F)]$$

rozepíšeme determinant dostaneme $\left(\frac{i}{2\pi} \to \lambda\right)$

$$\hat{\det}(\mathbb{1} + \lambda F) = {}^{[N]}\delta^{B_1 \dots B_N}_{A_1 \dots A_N} (\mathbb{1} + \lambda F)^{B_1}_{A_1} \wedge \dots \wedge (\mathbb{1} + \lambda F)^{B_N}_{A_N}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \lambda^k \underbrace{{}^{[N]}\delta^{B_1 \dots B_k C_1 \dots C_{N-k}}_{A_1 \dots A_k C_1 \dots C_{N-k}}}_{\binom{N}{k}^{-1}\, {}^{[k]}\delta^{B_1 \dots B_k}_{A_1 \dots A_k}} \binom{N}{k} F^{A_1}_{B_1} \wedge \dots \wedge F^{A_k}_{B_k}$$

[počet výběrů k součástí v N členech

$$= \sum_{k=0}^{N} \lambda^k\, {}^{[k]}\delta^{B_1 \dots B_k}_{A_1 \dots A_k} F^{A_1}_{B_1} \wedge \dots \wedge F^{A_k}_{B_k} = \sum_{k=0}^{N} \lambda^k F^{[A_1}_{A_1} \wedge \dots \wedge F^{A_k]}_{A_k}$$

$$= 1 + \lambda F^A_A + \frac{1}{2}\lambda^2 \left(F^A_A \wedge F^B_B - F^B_A \wedge B^A_B\right)$$

$$+ \frac{1}{3!}\lambda^3 \left(F^A_A \wedge F^B_B \wedge F^C_C + F^C_A \wedge F^A_B \wedge F^B_C + F^B_A \wedge F^C_B \wedge F^A_C - F^B_A \wedge F^A_B \wedge F^C_C - F^C_A \wedge F^B_B \wedge F^A_C - F^A_A \wedge F^C_B \wedge F^B_C\right) + \dots$$

$$= 1 + \lambda \operatorname{tr} F + \frac{1}{2}\lambda^2 \left((\operatorname{tr} F)^{\wedge 2} - \operatorname{tr}(F^{\wedge 2})\right) + \frac{1}{3!}\lambda^3 \left((\operatorname{tr} F)^{\wedge 3} + 2 \operatorname{tr}(F^{\wedge 3}) - 3 (\operatorname{tr} F) \wedge \operatorname{tr}(F^{\wedge 2})\right) + \dots$$

$$= 1 + \hat{C}_1[F] + \hat{C}_2[F] + \hat{C}_3[F] + \dots$$

Chernova charakteristika

Obecná Chernova charakteristika (Chern character)

je generována sym. inv. polyn.

$$\hat{Ch}(F) = \operatorname{tr} \hat{\exp} \frac{iF}{2\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \operatorname{tr} F^{\wedge k} \qquad \lambda = \frac{i}{2\pi}$$

$$ch = [\hat{Ch}(F)]$$

nehomogenní

Chernova charakteristika stupně k

- homogenní komponenta obecné Chern. charakt.

$$\hat{Ch}(F) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{Ch}_k(F)$$

$$\hat{Ch}_k(F) = \frac{\lambda^k}{k!} \operatorname{tr} F^{\wedge k} = \frac{\lambda^k}{k!} \hat{\operatorname{str}}_k(F, \dots, F) \qquad 2k\text{-forma}$$

$$ch_k = [\hat{Ch}_k(F)]$$

často se místo $\hat{Ch}_k(F)$ užívá $\operatorname{tr} F^{\wedge k}$

symetrická stopa

$$\operatorname{str}_k(A_1, \dots, A_k) = \sum_{\text{perm.}\,\sigma} \operatorname{tr}(A_{\sigma_1} \cdot \dots \cdot A_{\sigma_k})$$

$$\operatorname{str}_k\, \alpha_1 \dots \alpha_k = t_{(\alpha_1}{}^{A_k}{}_{A_1}\, t_{\alpha_2}{}^{A_1}{}_{A_2} \dots t_{\alpha_k)}{}^{A_{k-1}}{}_{A_k}$$

vztah k Chernovým charakt. třídám

viz předchozí výpočet

$$\hat{C}_1 = \hat{Ch}_1$$

$$\hat{C}_2 = -\hat{Ch}_2 + \frac{1}{2} \hat{Ch}_1^{\wedge 2}$$

$$\hat{C}_3 = 2\hat{Ch}_3 - \hat{Ch}_2 \wedge \hat{Ch}_1 + \frac{1}{6} \hat{Ch}_1^{\wedge 3}$$

$$\vdots$$

inverzní vztahy

$$\hat{\log}\,\hat{\det}(\mathbb{1}+\lambda F) = \mathrm{tr}(\hat{\log}(\mathbb{1}+\lambda F))$$

$$= \mathrm{tr}\left(\lambda F - \frac{1}{2}\lambda^2 F^{\wedge 2} + \frac{1}{3}\lambda^3 F^{\wedge 3} - \dots\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\lambda^k}{k} \mathrm{tr} F^{\wedge k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (k-1)!\, \hat{Ch}_k(F)$$

$$= Ch_1 - Ch_2 + 2\, Ch_3 + \dots$$

$$= \hat{\log}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{C}_k\right) =$$

$$= (\hat{C}_1 + \hat{C}_2 + \hat{C}_3 + \dots) - \frac{1}{2}(\hat{C}_1 + \hat{C}_2 + \dots)^{\wedge 2} + \frac{1}{3}(\hat{C}_1 + \dots)^{\wedge 3} + \dots$$

$$= \hat{C}_1 + \left(\hat{C}_2 - \frac{1}{2}\hat{C}_1^{\wedge 2}\right) + \left(\hat{C}_3 - \hat{C}_2 \wedge \hat{C}_1 + \frac{1}{3}\hat{C}_1^{\wedge 3}\right) + \dots$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{Ch}_1 = \hat{C}_1$$

$$\hat{Ch}_2 = -\hat{C}_2 + \frac{1}{2}\hat{C}_1^{\wedge 2}$$

$$\hat{Ch}_3 = \frac{1}{2}\hat{C}_3 - \frac{1}{2}\hat{C}_2 \wedge \hat{C}_1 + \frac{1}{6}\hat{C}_1^{\wedge 3}$$

$$\vdots$$

obecně $\hat{Ch}_k$, případně $\hat{C}_k$ tvoří bázi v algebře sym. inv. polyn., tj. každý inv. sym. polynom lze zapsat jako symetrické fce Chernových charakteristik případně Chernových charakt. tříd

Pontrjaginovy charakteristické třídy

$E\,M$ reálný vekt. bundle s metrikou H

grupa symetrie $O(E,H)$, tj.

$$F = -F^T$$

definujme positivní sym. oper.

$$Q = F \wedge F^T = -F^{\wedge 2}$$

Obecná Pontrjaginova třída

$$\widehat{PA}(F) = \det{}^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{1} + \frac{Q}{(2\pi)^2}\right) = \det{}^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{1} - \left(\frac{F}{2\pi}\right)^{\wedge 2}\right)$$

$$= \det\left(\mathbb{1} - \frac{F}{2\pi}\right) = \det\left(\mathbb{1} + \frac{F}{2\pi}\right)$$

$$p = \left[\widehat{PA}(F)\right]$$

pozor, platí $\operatorname{tr} F^{\wedge(2k+1)} = 0$

Pontrjaginova charakt. třída stupně $2k$

homogenní komponenta $\sim F^{\wedge 2k}$ ($4k$-forma)

$$\widehat{PA}(F) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{PA}_{2k}(F) \qquad \widehat{PA}_{2k+1}(F) = 0$$

výpočet obdobný Chern-ově třídě $\left(\lambda \to \frac{1}{(2\pi)^2}\right)$

$$\widehat{PA}(F) = 1 + \widehat{PA}_2 + \widehat{PA}_4 + \widehat{PA}_6 + \dots$$

$$= \left[1 + \lambda \operatorname{tr} Q + \frac{1}{2}\lambda^2\left(-\operatorname{tr} Q^{\wedge 2} + (\operatorname{tr} Q)^{\wedge 2}\right) + \frac{1}{3!}\lambda^3\left(2\operatorname{tr} Q^{\wedge 3} - 3\operatorname{tr} Q^{\wedge 2} \wedge \operatorname{tr} Q + (\operatorname{tr} Q)^{\wedge 3}\right) + \dots\right]^{\frac{1}{2}}$$

$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$

$$= 1 - \frac{1}{2}\lambda \operatorname{tr} F^{\wedge 2}$$

$$+ \frac{1}{8}\lambda^2\left(-2\operatorname{tr} F^{\wedge 4} + (\operatorname{tr} F^{\wedge 2})^{\wedge 2}\right)$$

$$+ \frac{1}{48}\lambda^3\left(-8\operatorname{tr} F^{\wedge 6} + 6\operatorname{tr} F^{\wedge 4} \wedge \operatorname{tr} F^{\wedge 2} - (\operatorname{tr} F^{\wedge 2})^{\wedge 3}\right) + \dots$$

zřejmě musí

$$4k \leq \dim M$$

$$2k \leq \dim E$$

Eulerova třída

tečný bundle – reálný vekt. bundle
metrika → metr. konexe ∇
→ křivost $R_{ab}{}^{m}{}_{n}$
grupa tg. – $so(2n)$ $\quad X^{m}{}_{n}$ $\quad X^{mn} = X^{[mn]}$
$\dim M = 2n+1 \qquad e = 0$

$\dim M = 2n$

$$e[M] = \left[\hat{Pf}\left(\frac{R}{2\pi}\right) \right]$$

Pfafián

$$Pf(X) = \frac{1}{2^n n!} \varepsilon_{a_1 b_1 \ldots a_n b_n} X^{a_1 b_1} \ldots X^{a_n b_n}$$

$$= X^{12} X^{34} \ldots X^{2n-1\,2n}$$

$$= \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n$$

$$= (\det X)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \xi_1 & & & & & \\ -\xi_1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & \xi_2 & & & \\ & & -\xi_2 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \xi_n \\ & & & & & -\xi_n & 0 \end{bmatrix}$$

Euler. char.

$$\hat{Pf}(R)_{a_1 b_1 \ldots a_n b_n} = \frac{1}{2^n n!} \varepsilon_{k_1 l_1 \ldots k_n l_n} R_{a_1 b_1}{}^{k_1 l_1} \wedge \ldots \wedge R_{a_n b_n}{}^{k_n l_n}$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \frac{1}{(2n)!} \varepsilon^{m_1 n_1 \ldots m_n n_n} \varepsilon_{k_1 l_1 \ldots k_n l_n} R_{m_1 n_1}{}^{k_1 l_1} \wedge \ldots \wedge R_{m_n n_n}{}^{k_n l_n} \varepsilon_{a_1 b_1 \ldots a_n b_n}$$

$$= \frac{1}{2^n n!} R_{k_1 l_1}{}^{k_1 l_1} \wedge \ldots \wedge R_{k_n l_n}{}^{k_n l_n} \varepsilon_{a_1 b_1 \ldots a_n b_n}$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n n!} R_{[k_1 l_1}{}^{k_1 l_1} \ldots R_{k_n l_n]}{}^{k_n l_n} \varepsilon_{a_1 b_1 \ldots a_n b_n}$$

Gauss-Bonnet theorem

$$\int_M e[M] = \chi(M) = \mathrm{index}_{deRham}(M)$$

kde $\chi(M) = \sum_i (-1)^i b_i$ Eul. char.

příklad index theorému

$\int_M e(M)$ dif. geometr. inf. skryté v integr. char. tříd

$\mathrm{index}_{deRham}(M)$ analytické inf. skryté v dimenzích ker a img operátorů d, δ a Δ

$$\chi[M] = \sum_k (-1)^k \underbrace{\dim(H^k M)}_{b_k}$$

b_k Bettiho čísla

topologické informace skryté v dimenzích kohomologických grup – Eulerova charakt.

$n=1$ dim $=2$

$$e = \frac{1}{2} R_{mn}{}^{mn} \varepsilon = \frac{1}{2} R\, \varepsilon = K \varepsilon$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K \varepsilon = b_0 - b_1 + b_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sféra}}}{=} 1 - 0 + 1 = 2$$

sféra: $K = \frac{1}{r^2}$ $|\varepsilon| = r^2 d\omega$

$n=2$ dim $=4$

$$(2\pi)^2 e = \frac{1}{8} \left(R_{kl}{}^{kl} \wedge R_{mn}{}^{mn} \right) \varepsilon =$$

$$= \frac{1}{8} \left(R_{kl}{}^{kl} R_{mn}{}^{mn} + R_{mn}{}^{kl} R_{kl}{}^{mn} - 4 R_{km}{}^{kl} R_{ln}{}^{mn} \right) \varepsilon$$

$$= \frac{1}{8} \Big(\underbrace{R^2}_{R_{klmn} R^{klmn}} - 4 \underbrace{Ric^2}_{Ric_{kl} Ric^{kl}} + \underbrace{R^2}_{RR} \Big) \varepsilon$$

$$\frac{1}{8} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \left(R^2 - 4 Ric^2 + R^2 \right) \varepsilon = \underbrace{b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4}_{\text{top. invariant}}$$