U spinorů volíme signaturu $+---$, i když jinde $+++$?, zde větší výhoda – viz [illegible]

Spinory (v relativitě)

C. Brinkman: Applications of Spinor Invariants in Atomic Physics, North Ho[illegible]

Nejpoučnější přístup k spinorům – i když trochu nekonvenční. Ukáže i to, že matice, ~~které~~ pomocí nichž se transformují spinory tvoří 2-hodnotovou representaci $L_+^\uparrow$ (~~nkauba~~)

Existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi 2. řádu – Hermitovskými maticemi a body prostoročasu:

(Hermit. matice 2. řádu $\overline{A_{mn}} = A_{nm}$ $\Rightarrow$ $A_{11} = \overline{A_{11}}$ ... reálné

s prvky komplexními $A_{22} = \overline{A_{22}}$ ... reálné

hermit. sdružení = transposice + komplexní sdruž. $\overline{A_{12}} = A_{21}$ ... tj. jsou komplexně sdružené

Každá hermit. matice 2. řádu může být zapsána ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} p+q & r-is \\ r+is & p-q \end{pmatrix},$$ kde p, q, r, s jsou 4-reálná čísla (neb A_{11}, A_{22} jsou reálná a lze je vždy psát v tomto tvaru; je opravdu $\overline{A_{12}} = A_{21}$)

máme 4-reálná čísla, která můžeme identifikovat jako t, x, y, z

přiřadíme

$$(0) \qquad \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix} \longleftrightarrow (t, x, y, z) \longrightarrow \text{tento bod - nebo vektor v } M_4$$

Podstatné je, že $\boxed{\det\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu}$

je to tedy kvadratická forma s Lorentzovskou signaturou – interval.

Víme, že každá transformace z $L_+^\uparrow$ zachovává tuto formu

$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ (dovolíme jen rotace v prostoročase, nikoliv translace – tj. $x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + \underline{O}$)

Lorentzově transformaci z $L_+^\uparrow$ odpovídá pak následující transformace naší Hermitovské matice:

(Raději psát zprava doleva):

→ komplexní sdruž.

$$(1)\quad \begin{pmatrix} t'+z' & x'\mp iy' \\ x'+iy' & t'-z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}_{\equiv U} \begin{pmatrix} t+z & x\mp iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \bar\alpha & \bar\gamma \\ \bar\beta & \bar\delta \end{pmatrix}}_{= U^{+}},$$

(zn. transpozice a ~~hermitovsk~~ komplexní sdružení) ⇒ hermitovské sdružení

kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou libovolná komplexní čísla, které splňují

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \equiv \alpha\delta - \beta\gamma = 1 + 0i$$

unimodulární matice

Když pouze tvar transformace - jak je vpravo, pak jasně je nová matice Hermitovská - (opět) a t', z', x', y' definovány stejně jako na počátku ($t'+z' = A'_{11}$) jsou reálná. Podmínka jednotkového determinantu z matice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ zaručuje, že se zachovává interval (jako det - výsledku) - snadno se přesvědčíme, že

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} t'+z' & x'\mp iy' \\ x'+iy' & t'-z' \end{pmatrix}} = t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \\ = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Transformace (1) je Lorentzovou transformací - (víz mohu $t' = c t$, ovšem -) a je jistě reálná a přitom se zachovává interval - vztah mezi t', x', y', z' a t, x, y, z je lineární.

Identickou transformaci dostaneme, když

$\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$. Že dostaneme obecnou Lor. transf. z $L_+^\uparrow$ je jasné proto, že transformace typu (1) jsou 6-tiparametrické: víz ~~kon~~ matice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ze 4 komplexních čísel ... 8 parametrů a 2 podmínky (jde o komplexní čísla!) tvaru det( ) = 1

Že nedostaneme inverse plyne z toho, že matice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ tvoří souvislou množinu (varietu) - obsahuje δ_A^B ~~tj~~ a libovolné jiné mohu projít spojitou změnou $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - to jsem nemohl u L.T. když pro $L_+^\uparrow$ bylo $\Lambda^0_{\ 0} \geq 1$, $\Lambda^0_{\ 0} \leq -1$ nemohu spojitě od jednička k druhým - tj. k inversi

Danou Lorentzovu transformaci mohu realisovat

právě 2 maticemi $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ a $-\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

napíšeme-li pod sebe transformaci maticově a normální - vidíme, že každému Λ odpovídají 2 unimodulární matice - tedy každé L.T. z $L_+^\uparrow$ právě dvě komplexní matice s $\det = 1$ - v 2dim. komplexním vektorovém prostoru ... tj. 2-hodnotová representace

[matice $\begin{pmatrix} t+z, & x-iy \\ x+iy, & t-z \end{pmatrix}$ se transformují pomocí přímého součinu matic $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ s maticemi komplexně sdruženými]

~~Jako~~ Ty veličiny, ~~se~~ které se transf. jen pomocí $(\ )$ ... $L^A{}_B$ $(A,B=1,2)$, nazveme je spinory.

Značme ξ^A

Spinorová transformace (tj. transf. spinorů) je tedy $\xi^A = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}$

(1) $\boxed{\xi^{A'} = L^A{}_B \xi^B}$, $\det L = 1$

ξ^A ... komplexní, to i L.

Každé takové transformaci - jak jsme viděli lze přiřadit vlastní L.T. (z $L_+^\uparrow$)

$$x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

Ke každé LT lze naopak přiřadit (1)

a $\boxed{\xi^{A'} = -L^A{}_B \xi^B}$

Lze ukázat, že tuto "dvojznačnost" nelze žádným způsobem vyloučit

Spolu s $\xi^{A'} = L^A{}_B\, \xi^B$ uvažujme komplexně sdruženou rovnici

$$\overline{\xi^{A'}} = \overline{L^A{}_B}\; \overline{\xi^B}$$

$\overline{L}$..ty dávají jinou reprezentaci $L_+^\uparrow$ (konjugovanou – sdruženou)

Abychom přísně rozlišovali spinory, které se transformují podle $\overline{L}^A{}_B$, budeme dělat nad písmeny •

$$\bar{\xi}^{\dot A'} = \bar{L}^{\dot A}{}_{\dot B}\; \bar{\xi}^{\dot B}$$

a obecný spinor $\eta^{\dot A}$ se bude transformovat podle → nemusí být komplexně sdružený k nějakému η veličina ale právě

$$\eta^{\dot A'} = \bar{L}^{\dot A}{}_{\dot B}\; \eta^{\dot B}$$

Nechť $l_A{}^B$ je matice reciproká k $L^A{}_B$ všimni si postavení indexů – je důležité

$$l_A{}^B L^A{}_C = \delta^B_C \Leftrightarrow L^C{}_B\, l_A{}^B = \delta^C_A \qquad L^A{}_B \to l_A{}^B$$

sčítání přes první indexy   sčítání přes 2. indexy

Pak def. dvojice komplexních čísel, kt. se transformují podle

$$\boxed{\xi'_A = l_A{}^B\, \xi_B}$$

(transf. se podle inverzní matice proto A píšeme dolu)

– tzv. "kovariantní složky" – (někdy: kovariantní a kontravar. spinory)

Také $l_A{}^B$ tvoří 2-hodnotovou repr. $L_+^\uparrow$

Lze snadno vidět, že $\boxed{\xi'_A\, \xi^{A'} = \xi_A\, \xi^A}$ ... je skalár

4. reprezentaci – tím, že transformujeme podle $\overline{l_A}{}^B$

$$\boxed{\xi'_{\dot A} = \bar{l}_{\dot A}{}^{\dot B}\, \xi_{\dot B}}$$

Poznámka

Grupa matic L obsahuje stejné prvky jako např. (grupa) $\bar{L}$

a je vlastní representací grupy z matic $\bar{L}$ -

neboť

$$L_1 L_2 = L_3 \Rightarrow \bar{L}_1 \bar{L}_2 = \bar{L}_3$$

Tyto 2 representace však nejsou ekvivalentní

tj: neex. žádná matice S, pro niž by

Důkaz:

$$S L S^{-1} = \bar{L} \quad \text{pro všechna } L$$

Připomínka: definice ekvivalentních representací

např. $T(g)$, A lin. operátor z V do V' (speciálně do V)

pak $T_A(g) = A\, T(g) A^{-1}$ pro vš. $T(g)$

tvoří rep. grupy

$$T_A(g_1 \cdot g_2) = T_A(g_1)\, T_A(g_2)$$

tu nazýváme ekvivalentní

jde důkaz? příkladem

uvažujme např. tyto 3 matice (jsou unimodulární)

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ — to nejsou Pauliho matice

každá z nich se transf. do k ní komplexně sdružené

tj. maticí $S = S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$ a pouze touto (až na faktor)

avšak na obecnou matici

$$\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}}_{\text{tj. } S = S^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}}_{\text{což je} \neq \text{obecně od} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} & \bar{\delta} \end{pmatrix}}$$

Spinory s lib. počtem indexů – tečkovaných nebo netečkovaných mohou být definovány požadavkem, že se transformují jako jedno-indexové spinory se st. indexy

např. $$\eta^{A\dot{X}}{}_{B}{}' = L^{A}{}_{C}\,\bar{L}^{\dot{X}}{}_{\dot{Y}}\,l_{B}{}^{D}\,\eta^{C\dot{Y}}{}_{D}$$

Věta – dokaž sami.

Ukažte, že sčítání, vnější násobení, symetrisace a antisymetrisace jsou kovariantní operace.

Pozn. netečkované a tečk. vždy samy mezi sebou musí být psány v jistém pevném pořadí – ale tečkované s netečkovanými můžeme libovolně prohazovat $\eta^{A\dot{W}}{}_{B} = \eta^{\dot{W}A}{}_{B}$ ...

Označení:

P... spinor když P indexů stejného druhu

PQ ... spinor, P indexů jednoho druhu a Q druhého

Def. (PP) spinor nazýváme Hermitovský, když ~~je roven svému komplexně sdruženému~~ stejné indexů opačného druhu

$$\phi^{B_1 \dots B_p \dot{X}_1 \dots \dot{X}_p} = \overline{\phi^{X_1 \dots X_p \dot{B}_1 \dots \dot{B}_p}} \equiv \bar{\phi}^{B_1 \dots B_p \dot{X}_1 \dots \dot{X}_p}$$

spec. pro 2 indexy

$$\phi^{A\dot{B}} = \overline{\phi^{B\dot{A}}} \equiv \bar{\phi}^{\dot{B}A} \equiv \bar{\phi}^{A\dot{B}}$$

tečkované bez tečky mohu psát lib. pořadí

níž $\overline{\xi^{A}} = \bar{\xi}^{\dot{A}}$

Příklad jedna z Pauliho matic

$$\sigma^{A}{}_{\dot{B}}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$ – musím transponovat a komplexně sdružit

Definujme Levi-Civitův symbol ve 2-dim

$$\varepsilon^{AB} = \varepsilon_{AB} = \varepsilon_{[AB]},\quad \varepsilon_{12} = 1 \Rightarrow [\varepsilon_{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$= \varepsilon^{\dot{X}\dot{Y}} = \varepsilon \dots$

Snadno vidíme, že platí identita:

$$\boxed{\varepsilon_{AB} \det \ell = \ell^C{}_A \ell^D{}_B \varepsilon_{CD}}$$

ale $\det \ell = 1 \Rightarrow \underline{\varepsilon_{AB} = \ell^C{}_A \ell^D{}_B \varepsilon_{CD}}$

$\rightarrow \varepsilon_{AB}$ kovariantní 2-spinor, kt. přechází sám v sebe při spinorových transformacích

Podobně $\varepsilon^{AB} = L^A{}_C L^B{}_D \varepsilon^{CD}$ ... kontravar. 2-spinor

$\varepsilon_{AB}, \varepsilon^{AB}$ ... hrají roli metrického tensoru v tensorovém počtu snižujeme a zvyšujeme jimi indexy

tojest i dále když pomocí $\varepsilon_{..}$ se def. skalární součin $\eta_{\mu\nu} \to \varepsilon_{..}\varepsilon_{..}$

$$\boxed{\xi_A = \xi^B \varepsilon_{BA} \Leftrightarrow \xi^B = \varepsilon^{BA} \xi_A}$$

(Zde narozdíl od tensorového počtu není ε sym. – musíme dávat pozor, že indexy snižuje 1. index a zvyšuje 2. index v ε)

$\xi_A \eta^A$ je skalár -- sami, že platí $\underline{\xi_A \eta^A = - \xi^A \eta_A}$

je $\varepsilon^{AC} \varepsilon_{BC} = \delta^A_B$ a podobně pro tečkované

(Pozn. v případě ε a δ píšeme $\varepsilon_{\dot{w}\dot{x}}$ místo $\bar{\varepsilon}_{\dot{w}\dot{x}}$ a $\delta^{\dot{w}}_{\dot{x}}$ místo $\bar{\delta}^{\dot{w}}_{\dot{x}}$)

<u>vztah mezi spinory a tensory</u> –

podle (0) – jen uvedli výhodnosti formální; odvít

$$X^{A\dot{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} t+z, & x-iy \\ x+iy, & t-z \end{pmatrix} = \sigma_\mu{}^{A\dot{B}} x^\mu,$$

kde $\sigma_\mu{}^{A\dot{B}}$ jsou $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (Pauliho matice) a $\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_1{}^{1\dot{1}}, \sigma_1{}^{1\dot{2}}$

přitom $\dot{B}$ čísluje sloupce a A ~~sloupce~~ řádky

$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

např.

$$X^{1\dot{2}} = x - iy = \underbrace{\sigma_1{}^{1\dot{2}}}_{1} x + \underbrace{\sigma_2{}^{1\dot{2}}}_{-i} y = x - iy$$

$$X^{2\dot{1}} = x + iy = \sigma_1{}^{2\dot{1}} x + \underbrace{\sigma_2{}^{2\dot{1}}}_{i} y = x + iy, \ldots$$

Snadno se přesvědčíme, že σ splňují relace:

(*) $$\boxed{\begin{aligned} &\sigma_\mu{}^{B\dot{X}}\sigma^\mu{}_{C\dot{Y}} = \delta_C^B\,\delta_{\dot{Y}}^{\dot{X}} \\ &\Longleftrightarrow\ \sigma^\mu{}_{C\dot{Y}}\,\sigma_\nu{}^{C\dot{Y}} = \delta^\mu_\nu \end{aligned}}$$

kde $\sigma^\mu{}_{C\dot{Y}} = \varepsilon\varepsilon\,\sigma$

Věta:

σ ... umožňují souvislost mezi obecným tensorem a spinorem – přesněji – každému tensoru přiřazuje jednoznačný spinor (nikoliv naopak)

$$T_{C\dot{Y}}{}^{A\dot{W}B\dot{X}} = \sigma_\mu{}^{A\dot{W}}\,\sigma_\nu{}^{B\dot{X}}\,\sigma^\varkappa{}_{C\dot{Y}}\,T_\varkappa{}^{\mu\nu}$$

v důsledku (*) – naopak

$$T_\varkappa{}^{\mu\nu} = \sigma^\mu{}_{A\dot{W}}\,\sigma^\nu{}_{B\dot{X}}\,\sigma_\varkappa{}^{C\dot{Y}}\,T_{C\dot{Y}}{}^{A\dot{W}B\dot{X}}$$

$T_\varkappa{}^{\mu\nu} \leftrightarrow T_{C\dot{Y}}{}^{A\dot{W}B\dot{X}}$

často se nevypisují vztahy přímo, ale pouze se píše

$$T_\varkappa{}^{\mu\nu} \leftrightarrow T_{C\dot{Y}}{}^{A\dot{W}B\dot{X}}$$

Vyjádření $\eta_{\mu\nu}$ pomocí odpovídajícího spinoru:

vztah $\det\begin{vmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{vmatrix} = t^2-x^2-z^2-y^2 = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$

$$\Rightarrow\quad \underbrace{2\,|X^{A\dot{B}}|}_{\shortparallel} = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$$

krůli tomuto vybrání $\frac{1}{2}$ u σ –

$$\Rightarrow\quad \underbrace{\varepsilon_{AC}\,\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}}\,X^{A\dot{B}}X^{C\dot{D}}}_{} = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$$

to ti vyjde $= t^2-z^2-x^2-y^2$

$$= \varepsilon_{AC}\,\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}}\,\sigma_\mu{}^{A\dot{B}}\sigma_\nu{}^{C\dot{D}}x^\mu x^\nu = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$$

x^μ je lib.

$$\Longrightarrow\quad \varepsilon_{AC}\,\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}}\,\sigma_\mu{}^{A\dot{B}}\sigma_\nu{}^{C\dot{D}} = \eta_{\mu\nu}$$

$\mu \to A\dot{B}$

$\nu \to C\dot{D}$

$$\varepsilon_{A\dot{B}C\dot{D}} = \boxed{\varepsilon_{AC}\,\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}} \leftrightarrow \eta_{\mu\nu}}$$

ale, když jsme v lib. souř. a v křivém prostoru signatury $(+---)$, můžeme vše dělat v daném bodě – v tečném vekt. prostoru a platí

$$\varepsilon_{AC}\,\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}} \leftrightarrow g_{\mu\nu}$$ – než $\sigma_\mu{}^{A\dot{B}}$ ... se také mění

při transformaci od $\overset{o}{x}^\mu$ ... kt. jsou LIS do obecných x^μ

- je vidět, že metrika je určena spinorovou strukturou (zadáním $\varepsilon_{..}$ a $\sigma_{..}$) - speciálně: považujeme-li spinorovou strukturu za základní, vyplývá

z $g_{\mu\nu} \leftrightarrow \varepsilon_{AB}\,\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}$ signatura $(1,-1,-1,-1)$

(např. - vezmeme-li za σ^μ ... normální Pauliho matice)

několik vět ze

Spinorová algebra:

Díky tomu, že spinorové indexy jen dvě hodnoty (tj. 2-dimenzionální) je

$$\boxed{\varepsilon_{A[B}\,\varepsilon_{CD]\,\text{cykl.}} = 0}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{AB}\,\varepsilon_{CD} + \varepsilon_{AC}\,\varepsilon_{DB} + \varepsilon_{AD}\,\varepsilon_{BC} = 0 \;\Big/\; \xi^{CD}$$

snižují prefix

$$\Rightarrow \varepsilon_{AB}\,\xi_C{}^C - \xi_{AB} + \xi_{BA} = 0$$

$$\Rightarrow (*)\ \boxed{\xi_{AB} = \xi_{(AB)} + \frac{1}{2}\varepsilon_{AB}\,\xi_C{}^C}$$

neboť

$$\xi_{AB} = \underbrace{\xi_{(AB)}}_{\frac{1}{2}(\xi_{AB}+\xi_{BA})} + \xi_{[AB]}\text{, ale } \xi_{[AB]} = \frac{1}{2}(\xi_{AB} - \xi_{BA}) =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{AB}\,\xi_C{}^C$$

Nechť speciálně

$$\xi_{AB} = \varphi_A\,\psi_B \qquad \varphi_A\psi^A = \varepsilon_{AB}\psi^B\psi^A = 0$$

z (*) $\Rightarrow$

$$\varphi_A\psi_B - \psi_A\varphi_B = \varepsilon_{AB}\,\varphi_C\psi^C \quad (**)$$

$\Rightarrow$ je-li $\varphi_A \sim \psi_A \Rightarrow \boxed{\varphi_C\psi^C = 0}$!! $\quad \varphi_A\psi^A$

a naopak je-li $\varphi_C\psi^C = 0 \Rightarrow \varphi_A\psi_B = \psi_A\varphi_B$

$$\Rightarrow \underset{\text{dosazení}}{\cdots} \Rightarrow \varphi_A = k\,\psi_A$$

viz Penrose – Battelle – str. 142

V tomto smyslu – rozdíl mezi matematikou a fysikou

matematika – formalismus maximální obecnosti –

fysiky – máme popsat specifickou (?) strukturu – vesmír

– ne příliš obecný formalismus – např. teorie, kt. by obsahovaly

dimensi jako parametr jsou příliš obecné

proto chceme specifický formalismus – to právě spinory

spinorová struktura základnější než Riemannovská

svrchu signatura z ní plyne

Lemma:

Libovolná dvojice spinorů κ_A, μ_A pro niž $\kappa_A \mu^A = 1$ může být basí ve spinorovém prostoru

viz π (**) $\Rightarrow$ $\varepsilon_{AB} = \kappa_A \mu_B - \mu_A \kappa_B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \delta_A^{\ B} = \kappa_A \mu^B - \mu_A \kappa^B$

Takže po vynás. lib. ξ^A:

$$\xi^B = \underbrace{(\xi^A \kappa_A)}\mu^B - \underbrace{(\xi^A \mu_A)}\kappa^B$$

složky lineární kombinace

speciálně mohu ~~za~~ basi ~~volit~~ ~~κ^A, μ^A~~ brát

~~κ~~ $\varepsilon_{(A)}^{\ \ B}$ viz 1. vektor base:

$\varepsilon_{(1)}^{\ \ B} = (1, 0)$

2. vektor: $\varepsilon_{(2)}^{\ \ B} = (0, 1)$

a pro kovar. $\varepsilon_A^{\ (B)}$

Vrátíme se ještě k (*):

(*) vyjadřuje to co Penrose nazval "jen symetrické spinory matter"

Platí věta: každá konečná ireducib. representace $L_+^\uparrow$ je ekvir. nějaké representaci spinorů, kt. jsou symetrické ve všech (netečkovaných a tečkovaných zvlášť) indexech. (viz Ljubarskij str. 192)

Spinory, kt. nejsou symetrické ve všech svých indexech se transformují podle reducibilní representace, což se ve spinorové algebře projevuje v možnosti nahrazení nesymetrického spinoru součiny ε_{AB} a spinorů nižšího řádu – Platí (D. indukcí)

nechť $\overset{\sim}{\underset{P}{=}}$ značí rovnost spinorů modulo součin ε_{AB} a spinorů nižšího řádu

Např: $\xi_{AB} \underset{P}{\tilde{=}} \xi_{(AB)}$ podle (*).

Platí

$$\phi_{AB\ldots K} \underset{P}{\tilde{=}} \phi_{(AB\ldots K)} \text{ pro lib. P-spinor } \phi_{AB\ldots K}$$

Spinorové ekvivalenty některých vektorů a tensorů. (Pirani, str. 312)

Ke každému ξ^μ odpovídá

$$\xi^{A\dot{X}} = \sigma_\mu{}^{A\dot{X}} \xi^\mu \quad \Big| \quad \xi_\mu = \sigma_\mu{}_{A\dot{X}} \xi^A \xi^{\dot{X}}$$

Je $\xi^\mu \xi_\mu = 2\det(\xi^{A\dot{X}})$

$\Rightarrow$ je-li ξ^μ (nemusí být reálný) nulový vektor $\Leftrightarrow \det(\xi^{A\dot{X}}) = 0 \Rightarrow \xi^{A\dot{X}}$ jako matice má hodnost 1 $\Rightarrow$

$$\xi^\mu \xi_\mu = 0 \Leftrightarrow \xi^{A\dot{X}} = \xi^A \bar{\eta}^{\dot{X}}$$

(snadno si ověříte, že odtud $\Rightarrow \det(\,) = 0$ ale i naopak)

Je-li ξ^μ nulové reálné, musí

$$\xi^{A\dot{X}} = \bar{\xi}^{A\dot{X}} \Rightarrow \boxed{\xi^A \bar{\eta}^{\dot{X}} = \eta^A \bar{\xi}^{\dot{X}}} \; (*)$$

$$= \overline{\xi^{X\dot{A}}} = \overline{\xi^X \bar{\eta}^{\dot{A}}} = \bar{\xi}^{\dot{X}} \eta^A$$

pro $A = 1 = \dot{X}$:

viz $\xi^1 \bar{\eta}^1 = \bar{\xi}^1 \eta^1$

$\Rightarrow \xi^1 \bar{\eta}^1$ je reálné č. $\equiv \tilde{\lambda}$

také ale $\xi^1 \bar{\eta}^2 = \eta^1 \bar{\xi}^2 \,/\cdot \bar{\eta}^1$

$\tilde{\lambda}\bar{\eta}^2 = \underbrace{\bar{\eta}^1 \eta^1}_{\text{je reálné}} \bar{\xi}^2 \Rightarrow \eta^2 = \lambda \xi^2$ podobně pro

$$\Rightarrow \xi^A = \lambda \eta^A \qquad \lambda \ldots \text{reálné}$$

k důkazu tohoto stačí vynásobit (*) η_A pak užít toho, že když $\eta_A \xi^A = 0 \Rightarrow \eta_A \sim \xi_A$ a pak až dokázat reálnost

můžeme vsunout k η $|\lambda|^{\frac{1}{2}}$

$$\boxed{\xi^{A\dot{X}} = \pm \xi^A \bar{\xi}^{\dot{X}}}$$

pak

Věta:

Je-li ξ^μ reálné a nulové $\xi^\mu \xi_\mu = 0 \Longleftrightarrow \xi^{A\dot{X}} = \pm \xi^A \bar{\xi}^{\dot{X}} \Leftrightarrow$ $\bar{\xi}^{\dot{X}} = \frac{\lambda}{\xi^{\dot{X}}}$

$\Leftrightarrow$ náš stručný zápis: $\xi^\mu \leftrightarrow \pm \xi^A \bar{\xi}^{\dot{X}}$

(viz Penrose-Battelle str. 151)

Lze nahlédnout, že když $\xi^0 > 0$, tj. nulový vektor míří do budoucnosti – musí $\xi^{A\dot{X}} = + \xi^A \bar{\xi}^{\dot{X}}$ (∘/.)

$\Rightarrow \xi^0 \geq 0$

viz $\begin{pmatrix} \xi^0 + \xi^3, & \xi^1 - i\xi^2 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \xi^{A\dot{X}}$ $\quad \xi^{11} = \xi^1 \bar{\xi}^1 > 0$ (viz $(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 > 0$)

má být $\xi^{A\dot{X}} = \pm \xi^A \bar{\xi}^{\dot{X}}$ (11*)

Důkaz, že zadáním ξ^A a $\xi^{A\dot{X}}$ je dána časová orientace variety:

Když $\xi^{A\dot{X}} = + \xi^A \bar{\xi}^{\dot{X}}$, pak $\xi^{1\dot{1}} = \xi^1 \bar{\xi}^{\dot{1}} =$

$= \xi^1 \overline{\xi^1} > 0$

ale z $\xi^\mu = \sigma^\mu{}_{A\dot{X}} \xi^{A\dot{X}} \Rightarrow$ $\xi^\mu = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$

$$\xi^{1\dot{1}} = \xi^0 + \xi^3$$

A platí, že je-li ξ^μ nulový vektor, pak z $\xi^{1\dot{1}} > 0 \Rightarrow \xi^0 > 0$

$\xi^{1\dot{1}} < 0 \Rightarrow \xi^0 < 0$

neb musí (v LIS) $(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 = 0$

$\Rightarrow (\xi^0)^2 = (\xi^3)^2 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2$

$\Rightarrow \quad |\xi^0| \geq |\xi^3|$

1) $\xi^0 > 0, \ \xi^3 > 0 \Rightarrow$ jasné $\xi^0 + \xi^3 > 0$

2) $\xi^0 > 0, \ \xi^3 < 0 \Rightarrow \xi^0 \geq -\xi^3 \Rightarrow \xi^0 + \xi^3 \geq 0$

3) $\xi^0 < 0, \ \xi^3 > 0 \Rightarrow$ . . . .

4) $\xi^0 < 0, \ \xi^3 < 0 \Rightarrow$ . . . .

Pro nulový vektor mířící do minulosti je $\xi^\mu \leftrightarrow -\xi^A \bar{\xi}^{\dot{X}}$

(toto ovšem závisí na vztahu mezi $\xi^{A\dot{X}}$ a ξ^μ, tj. daném Pauliho maticemi – je ovšem vidět, že již zadáním (ξ z ε_{AB}) – tj. zadáním spinorové struktury – lze <u>definovat</u> budoucnost a minulost podle znaménka $\xi^A \bar{\xi}^{\dot{X}}$ – tedy má-li na varietě ex. spin. struktura, musí být [varieta] časově orientovatelná).

Uvažujme nyní <u>antisym. 2-indexový tensor</u>:

$$F_{\mu\nu} = F_{[\mu\nu]} \qquad F_{A\dot{W}B\dot{X}} \Leftrightarrow F_{\mu\nu}$$

$\Rightarrow$ jeho spinorový ekvivalent musí mít tutéž symetrii

tj. (0) $\underline{F_{A\dot{W}B\dot{X}}} = \sigma^\mu{}_{A\dot{W}}\, \sigma^\nu{}_{B\dot{X}}\, \underset{\substack{-\nu\mu \\ \mu \leftrightarrow \nu}}{F_{\mu\nu}} = -\sigma^\mu{}_{B\dot{X}}\, \sigma^\nu{}_{A\dot{W}}\, F_{\mu\nu} =$

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \qquad = \underline{-F_{B\dot{X}A\dot{W}}}$$

$\Rightarrow$ $F_{A\dot{W}B\dot{X}} = \frac{1}{2}(F_{A\dot{W}B\dot{X}} - F_{B\dot{X}A\dot{W}}) =$

$$= \frac{1}{2}(F_{A\dot{W}B\dot{X}} \underbrace{- F_{B\dot{W}A\dot{X}} + F_{B\dot{W}A\dot{X}}}_{\equiv 0} - F_{B\dot{X}A\dot{W}}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\varepsilon_{AB}\, F_{H\dot{W}}{}^{H}{}_{\dot{X}} + \varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\, F_{B\dot{P}A}{}^{\dot{P}})$$

podle (4) kdy $\xi_{AB} - \xi_{BA} = \varepsilon_{AB}\, \xi_C{}^C$ – zde $F_{A\dot{W}B\dot{X}}$ ... fixuji $\dot{W}\dot{X}$ a mám totéž

Značme $\phi_{AB} \equiv \frac{1}{2} F_{B\dot{P}A}{}^{\dot{P}}$ (antisymetrie)

zde prohození dvojic ($A^{\dot{P}}$) s dvojicí $B\dot{P}$ a užití (0)

Pak $\underline{\phi_{AB}} = -\frac{1}{2} F_{A}{}^{\dot{P}}{}_{B\dot{P}} = \frac{1}{2} F_{A\dot{P}B}{}^{\dot{P}} = \underline{\phi_{BA}}$ je sym.

to je antisym.

je sym.

Podobně dokážeme $F_{H\dot{W}}{}^{H}{}_{\dot{X}} = F_{H\dot{X}}{}^{H}{}_{\dot{W}}$

je sym.

speciálně, je-li $F_{\mu\nu}$ reálné, musí $F_{A\dot{W}B\dot{X}}$ být hermitovské

Když je hermitovské, pak

$$F_{A\dot{W}B\dot{X}} = \bar{F}_{A\dot{W}B\dot{X}} \quad \text{a tedy} \quad \frac{1}{2}F_{H\dot{W}}{}^{H}{}_{\dot{X}} = \frac{1}{2}\bar{F}_{H\dot{W}}{}^{H}{}_{\dot{X}} = \frac{1}{2}\bar{F}_{\dot{W}H\dot{X}}{}^{H}$$

$$= F_{AB\dot{W}\dot{X}} \overset{\text{herm.}}{=} \overline{F_{WX\dot{A}\dot{B}}} = F_{\dot{W}\dot{X}AB} = \qquad = \frac{1}{2}\overline{F_{WHX}{}^{H}} = \cancel{\frac{1}{4}}\,\overline{\phi_{WX}} = \cancel{\frac{1}{4}}$$

bez teček a s tečkami nesmím prohazovat mezi sebou samými ale $F_{A\dot{W}\ldots} = F_{\dot{W}A}$

$$= \bar{\phi}_{\dot{W}\dot{X}}$$

$$F_{A\dot{W}B\dot{X}} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{AB}F_{H\dot{W}}{}^{H}{}_{\dot{X}} + \varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}F_{B\dot{P}A}{}^{\dot{P}}\right) =$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{\mu\nu} \longleftrightarrow \varepsilon_{AB}\bar{\phi}_{\dot{W}\dot{X}} + \varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\phi_{AB}} \quad \checkmark \quad \phi_{AB} = \phi_{BA}, \quad \bar{\phi}_{\dot{W}\dot{X}} = \bar{\phi}_{\dot{X}\dot{W}}$$

kde $\phi_{AB} = \frac{1}{2}F_{B\dot{P}A}{}^{\dot{P}}$ je symetrický 2-spinor

(podrobněji $\boxed{F_{\mu\nu} = \sigma_{\mu}{}^{A\dot{W}}\sigma_{\nu}{}^{B\dot{X}}\left(\varepsilon_{AB}\bar{\phi}_{\dot{W}\dot{X}} + \varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\phi_{AB}\right)}$)

Reálný antisym. tensor má 6 složek nezáv. – je určen symetrickým 2spinorem a naopak

ϕ_{AB} má 3 nezávislé, komplexní složky
ϕ_{11}, $\phi_{12} = \phi_{21}$, ϕ_{22} .. tj. 6 veličin

Předvedli jsme si jak lze ~~ty~~ antisym. tensoru 2. řádu přiřadit symetrický spinor a naopak – můžeme pod $F_{\mu\nu}$ si myslet EMP
v gravitaci potřebujeme tensory 4. řádu – například Riemannův tensor – na základě spinorového ekvivalentu lze totiž klasifikovat Riem. tensor a pak lze zjistit, že různé fysikální situace odpovídají různým třídám Riem. tensoru

O Riemann. tensoru především víme, že má symetrie
v 1. dvou i 2. dvou indexech (má i další!) a 1. dvojici mohu prohodit s druhou

Studujme proto spinorový ekvivalent nejprve tensoru $B_{\alpha\beta\gamma\delta}$ pro nějž $B_{[\alpha\beta][\gamma\delta]}$ a $B_{\alpha\beta\gamma\delta} = B_{\gamma\delta\alpha\beta}$

Pak $B_{\alpha\beta\gamma\delta} \longleftrightarrow B_{A\dot{W}\,B\dot{X}\,C\dot{Y}\,D\dot{Z}}$

Dále budeme postupovat bez podrobných výpočtů

Když aplikujeme předchozí postup pro $F_{\mu\nu}$ na každou dvojici indexů

členy typu $(\varepsilon_{AB}\bar{\Phi}_{\dot{W}\dot{X}} + \phi_{AB}\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}})(\varepsilon_{CD}\bar{\Psi}_{\dot{Y}\dot{Z}} + \psi_{CD}\varepsilon_{\dot{Y}\dot{Z}})$

opravdu vyjde

$$B_{A\dot{W}B\dot{X}C\dot{Y}D\dot{Z}} = B_{ABCD}\,\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\varepsilon_{\dot{Y}\dot{Z}} + \bar{B}_{\dot{W}\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}}\,\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD} +$$
$$+ C_{AB\dot{Y}\dot{Z}}\,\varepsilon_{CD}\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}} + C_{CD\dot{W}\dot{X}}\,\varepsilon_{AB}\varepsilon_{\dot{Y}\dot{Z}},$$

kde $B_{ABCD} = \frac{1}{4} B_{A\dot{P}B}{}^{\dot{P}}{}_{C\dot{Q}D}{}^{\dot{Q}}$ a je $B_{(AB)(CD)} = B_{CDAB}$

podobně $\boxed{C_{\dots} = \frac{1}{4} B_{A\dot{P}B}{}^{\dot{P}}{}_{G\dot{Y}}{}^{G}{}_{\dot{Z}} = C_{(AB)(\dot{Y}\dot{Z})} = \bar{C}_{AB\dot{Y}\dot{Z}}}$ vyhovuje

(nic $C \longleftrightarrow \phi\bar{\Psi}$ takže je opravdu hermitovské)

nyní jako každý spinor, lze B_{ABCD} rozepsat pomocí úplně symetrické části a $\varepsilon_{\cdot\cdot}$ spinory vzniklé z B úžením

vyjde
$$\boxed{B_{ABCD} = B_{(ABCD)} + \frac{1}{6}(\varepsilon_{BC}\varepsilon_{AD} + \varepsilon_{BD}\varepsilon_{AC})B, \quad \text{kde } B = B_{RS}{}^{RS}}$$ důkaz viz %

pak značme-li $B_{(ABCD)} \equiv A_{ABCD}$ je závěrem

bez nápadu $A_{BCD} = \frac{1}{4}\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\varepsilon_{\dot{Y}\dot{Z}} B_{(A}{}^{\dot{W}}{}_{B}{}^{\dot{X}}{}_{C}{}^{\dot{Y}}{}_{D)}{}^{\dot{Z}}$

$$(+)\quad\left\{\begin{aligned} B_{A\dot{W}B\dot{X}C\dot{Y}D\dot{Z}} &= A_{ABCD}\,\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\varepsilon_{\dot{Y}\dot{Z}} + \varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\bar{A}_{\dot{W}\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}} + \\ &+ \frac{1}{6}(\varepsilon_{AD}\varepsilon_{BC} + \varepsilon_{AC}\varepsilon_{BD})\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\varepsilon_{\dot{Y}\dot{Z}}B + \\ &+ \frac{1}{6}(\varepsilon_{\dot{W}\dot{Z}}\varepsilon_{\dot{X}\dot{Y}} + \varepsilon_{\dot{W}\dot{Y}}\varepsilon_{\dot{X}\dot{Z}})\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\bar{B} + \\ &+ C_{AB\dot{Y}\dot{Z}}\,\varepsilon_{CD}\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}} + C_{CD\dot{W}\dot{X}}\,\varepsilon_{AB}\varepsilon_{\dot{Y}\dot{Z}} \end{aligned}\right.$$

tj. s C se zde nic nedělá

přitom každý člen lze rozepsat pomocí B . . . .

každý z těchto . . . .

už víme, že $B_{ABCD} = B_{CDAB}$

cykl.

$$B_{ABCD} = \frac{1}{3}\left(B_{ABCD} + B_{ACDB} + B_{ADBC}\right)$$

$$+ \frac{1}{3} B_{ABCD} - \frac{1}{3} B_{ACBD}$$ — je antisym. v BC $\Rightarrow$ $= \frac{1}{3} \epsilon_{BC} B_{AH}{}^{H}{}_{D}$

$$+ \underbrace{\frac{1}{3} B_{ABCD}}_{= \frac{1}{3} B_{ABDC}} - \frac{1}{3} B_{ADBC} =$$ — " — v BD $= \frac{1}{3} \epsilon_{BD} B_{AH}{}^{H}{}_{C}$

$= B_{ABCD}$

$$= \frac{1}{3}\left(B_{ABCD} + B_{ACBD} + B_{ADBC}\right) + \frac{1}{3} \epsilon_{BC} B_{AH}{}^{H}{}_{D} + \frac{1}{3} \epsilon_{BD} B_{AH}{}^{H}{}_{C}$$

prohození dvojic

ale $B_{AH}{}^{H}{}_{D} = -B_{A}{}^{H}{}_{HD} = -B_{HDA}{}^{H} = -B_{DH}{}^{H}{}_{A}$

tj. $B_{AH}{}^{H}{}_{D}$ je antisym. v A, D

tj. $B_{AH}{}^{H}{}_{D} = \frac{1}{2} \epsilon_{AD} \underbrace{B_{GH}{}^{GH}}_{= B}$ $B_{RS}{}^{RS}$

Předpokládejme nyní další symetrie tensoru $B_{\alpha\beta\gamma\delta}$

(1.) $B_{\alpha(\beta\gamma)\delta} = 0$ tj: $B_{\alpha\beta\gamma\delta} = - B_{\alpha\gamma\beta\delta}$

$\Rightarrow$ $B_{\alpha\beta\gamma\delta}$ je antisymetrické ve všech indexech
jak snadno nahlédneme

$\Rightarrow$ $B_{\dots}$ má jen jednu nezávislou složku (v. další symetrizaci) ~~jsou násobkem~~ a musí být násobkem Levi-Civitova tensoru

důkaz viz dále str. 15*, 15**

x (+) - vyměň $B \leftrightarrow C$, $\dot X \leftrightarrow \dot Y$ a sečti; udělej (ABCD) $\Rightarrow A_{ABCD} = 0$ pak (ABC) $\Rightarrow C_{AB\dot Y\dot Z} = 0$

Snadno zjistíme, že při těchto symetriích musí

$A_{\dots} = 0 = C_{AB\dot Y\dot Z}$ a že B musí být ryze imaginární $B = i\beta$ ... β reálné (neb koef. u B a $\bar B$ jsou stejné)

pak spinorový ekvivalent $B_{\alpha\beta\gamma\delta}$ je

$$B_{A\dot W B\dot X C\dot Y D\dot Z} = \frac{1}{3} i\beta \left(\varepsilon_{AC}\varepsilon_{BD}\varepsilon_{\dot W\dot X}\varepsilon_{\dot Y\dot Z} - \varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\varepsilon_{\dot W\dot Y}\varepsilon_{\dot X\dot Z} \right)$$

aby B bylo přímo ekviv. Levi-Civitovu symbolu,
musí $\beta = 3$

pak ekvivalent $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ je $\varepsilon_{\alpha\delta}{}^{\beta\gamma}$

$$\varepsilon_{A\dot W D\dot Z}{}^{B\dot X C\dot Y} = i\left(\delta_A^B \delta_D^C \delta_{\dot W}^{\dot Y} \delta_{\dot Z}^{\dot X} - \delta_A^C \delta_D^B \delta_{\dot W}^{\dot X} \delta_{\dot Z}^{\dot Y} \right)$$

Víme, že v EMP můžeme k $F_{\alpha\beta}$ vytvořit duální tensor $F^*_{\alpha\beta}$

$$F^*_{\alpha\delta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\delta}{}^{\beta\gamma} F_{\beta\gamma}$$

Měli jsme $F_{\alpha\beta} \longleftrightarrow \varepsilon_{AB}\bar\Phi_{\dot W\dot X} + \varepsilon_{\dot W\dot X}\phi_{AB}$

pak
$$F^*_{\alpha\delta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\delta}{}^{\beta\gamma}F_{\beta\gamma} \longleftrightarrow \frac{1}{2} i \left(\delta_A^B \delta_D^C \delta_{\dot W}^{\dot Y} \delta_{\dot Z}^{\dot X} - \delta_A^C \delta_D^B \delta_{\dot W}^{\dot X} \delta_{\dot Z}^{\dot Y} \right) \cdot \left(\varepsilon_{BC}\bar\Phi_{\dot X\dot Y} + \varepsilon_{\dot Y\dot X}\phi_{BC} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} i \left(\varepsilon_{AD}\bar\Phi_{\dot Z\dot W} + \underbrace{\varepsilon_{\dot Z\dot W}\phi_{AD} - \varepsilon_{DA}\bar\Phi_{\dot W\dot Z}}_{\text{je sym v } \dot z, \dot w} - \varepsilon_{\dot W\dot Z}\phi_{DA} \right)$$

$$= i\left(\varepsilon_{AD}\bar\Phi_{\dot W\dot Z} - \varepsilon_{\dot W\dot Z}\phi_{AD} \right)$$

$\bar\Phi_{\dot Z\dot W}$

$$B_{A\dot{W}B\dot{X}C\dot{Y}D\dot{Z}} = A_{ABCD}\,\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\,\varepsilon_{\dot{Y}\dot{Z}} + \varepsilon_{AB}\,\varepsilon_{CD}\,\bar{A}_{\dot{W}\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}}$$

$$+ \frac{1}{6}\left(\varepsilon_{AD}\,\varepsilon_{BC} + \varepsilon_{AC}\,\varepsilon_{BD}\right)\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\,\varepsilon_{\dot{Y}\dot{Z}}\,B$$

$$+ \frac{1}{6}\left(\varepsilon_{\dot{W}\dot{Z}}\,\varepsilon_{\dot{X}\dot{Y}} + \varepsilon_{\dot{W}\dot{Y}}\,\varepsilon_{\dot{X}\dot{Z}}\right)\varepsilon_{AB}\,\varepsilon_{CD}\,\bar{B}$$

$$+ C_{AB\dot{Y}\dot{Z}}\,\varepsilon_{CD}\,\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}} + C_{CD\dot{W}\dot{X}}\,\varepsilon_{AB}\,\varepsilon_{\dot{Y}\dot{Z}}$$

$B \leftrightarrow C$, $\dot{X} \leftrightarrow \dot{Y}$:

$$A_{ACBD}\,\varepsilon_{\dot{W}\dot{Y}}\,\varepsilon_{\dot{X}\dot{Z}} + \varepsilon_{AC}\,\varepsilon_{BD}\,\bar{A}_{\dot{W}\dot{Y}\dot{X}\dot{Z}}$$

$$+ \frac{1}{6}\left(\varepsilon_{AD}\,\varepsilon_{CB} + \varepsilon_{AB}\,\varepsilon_{CD}\right)\varepsilon_{\dot{W}\dot{Y}}\,\varepsilon_{\dot{X}\dot{Z}}\,B$$

$$+ \frac{1}{6}\left(\varepsilon_{\dot{W}\dot{Z}}\,\varepsilon_{\dot{Y}\dot{X}} + \varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\,\varepsilon_{\dot{Y}\dot{Z}}\right)\varepsilon_{AC}\,\varepsilon_{BD}\,\bar{B}$$

$$+ C_{AC\dot{X}\dot{Z}}\,\varepsilon_{BD}\,\varepsilon_{\dot{W}\dot{Y}} + C_{BD\dot{W}\dot{Y}}\,\varepsilon_{AC}\,\varepsilon_{\dot{X}\dot{Z}}$$

---

sečtu ~~[illegible]~~ pak musí být 0,
protože $B_{\alpha(\beta\gamma)\delta} = 0$.

Když úplná symetrizace v ABCD (těch 24 členů $4!$

ABCD ACDB
ACBD ADBC
ABDC ADCB

– 6 $= 3!$ a to 4krát – když začínají B, C, D)

najdi
všude se odečte – viz bude člen $\left(C_{AC\dot{X}\dot{Z}}\,\varepsilon_{BD}\,\varepsilon_{\dot{W}\dot{Y}} + C_{AC\dot{X}\dot{Z}}\,\varepsilon_{DB}\,\varepsilon_{\dot{W}\dot{Y}} \right) = 0$ a pod.

jen zbude $A_{(ABCD)}\,\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\,\varepsilon_{\dot{Y}\dot{Z}} + A_{(ACBD)}\,\varepsilon_{\dot{W}\dot{Y}}\,\varepsilon_{\dot{X}\dot{Z}} = 0$

to musí pro vš. $\dot{W}\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}$ i pro $\dot{X}=\dot{Y}$ – pak jasné $\Rightarrow A_{(ABCD)} = 0$

$\Rightarrow A_{ABCD} = 0$

(15*)

Nyní symetrizuji jen v (ABC)
tj: 6 členů

$$\begin{array}{ll} ABC & ACB \\ BAC & BCA \\ CAB & CBA \end{array}$$

tím vše u B a $\bar{B}$ vypadne

viz u těch ε co nepřísluší D:

$$\varepsilon_{AD}\,\varepsilon_{BC}\;\;\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\,\varepsilon_{\dot{Y}\dot{Z}}\,B$$

budeš $\varepsilon_{AD}\,\varepsilon_{CB}\,\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\,\varepsilon_{\dot{Y}\dot{Z}}\,B\cdots$ dá dohromady 0

takže dostanu $C_{AB\dot{Y}\dot{Z}}=0$

pak
$$\left(\varepsilon_{AD}\,\varepsilon_{BC}+\varepsilon_{AC}\,\varepsilon_{BD}\right)\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\,\varepsilon_{\dot{Y}\dot{Z}}\,B$$
$$+\left(\varepsilon_{\dot{W}\dot{Z}}\,\varepsilon_{\dot{X}\dot{Y}}+\varepsilon_{\dot{W}\dot{Y}}\,\varepsilon_{\dot{X}\dot{Z}}\right)\varepsilon_{AB}\,\varepsilon_{CD}\,\bar{B}$$
$$+\left(\varepsilon_{AD}\,\varepsilon_{CB}+\varepsilon_{AB}\,\varepsilon_{CD}\right)\varepsilon_{\dot{W}\dot{Y}}\,\varepsilon_{\dot{X}\dot{Z}}\,B$$
$$+\left(\varepsilon_{\dot{W}\dot{Z}}\,\varepsilon_{\dot{Y}\dot{X}}+\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\,\varepsilon_{\dot{Y}\dot{Z}}\right)\varepsilon_{AC}\,\varepsilon_{BD}\,\bar{B}\quad=0$$

polož $B=C$, $\dot{X}=\dot{Y}$

$$\varepsilon_{AB}\,\varepsilon_{BD}\,\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\,\varepsilon_{\dot{X}\dot{Z}}\,B$$
$$+\varepsilon_{AB}\,\varepsilon_{BD}\,\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\,\varepsilon_{\dot{X}\dot{Z}}\,\bar{B}$$
$$+\varepsilon_{AB}\,\varepsilon_{BD}\,\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\,\varepsilon_{\dot{X}\dot{Z}}\,B$$
$$+\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\,\varepsilon_{\dot{X}\dot{Z}}\,\varepsilon_{AB}\,\varepsilon_{BD}\,\bar{B}=0 \quad\Longrightarrow B=-\bar{B}$$
$$\longrightarrow B=i\beta$$

Pak je snadno vidět (stačí uvážíme-li $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$) a dosadíme za $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$, $\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})$

že $F_{\alpha\beta}\cos\theta + F^{*}_{\alpha\beta}\sin\theta \longleftrightarrow \varepsilon_{AB}\bar{\phi}_{\dot{W}\dot{X}}e^{i\theta} + \varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\phi_{AB}e^{-i\theta}$

Zobrazení antisym. tensoru $F_{\alpha\beta}$ na $\rightarrow F_{\alpha\beta}\cos\theta + F^{*}_{\alpha\beta}\sin\theta$, které v ~~v~~ odpovídajících spinorech je $\boxed{\phi_{AB} \rightarrow \phi_{AB}e^{-i\theta}}$ se nazývá duální rotace (zachvíli jistě budeme potřebovat)

(2.) Předpokládejme ~~navíc~~ nyní

$B_{\alpha[\beta\gamma\delta]cykl.} = 0$ .... tím právě všechny symetrie Riem. tensoru

odtud lze snadno že $B = \bar{B}$ ⟹ obecnému Riemannovu tensoru odpovídá spinor $B_{A\dot{W}B\dot{X}C\dot{Y}D\dot{Z}}$ daný (+), přičemž $B = \bar{B}$

(3.) Předpokládejme dále ještě $B_{\alpha\beta}{}^{\beta}{}_{\delta} = 0$

to odpovídá Riemannovu tensoru ve vakuu

tedy $R_{\alpha\beta}{}^{\beta}{}_{\delta} = R_{\alpha\delta}$ ... Ricciho tensor ... ve vakuu $R_{\alpha\beta} = 0$ (než to i když zdroje – a mimo nich ...)

Pak v (+) musíme zúžit v odpovídajících "spinorových duojicích" – tj. v $_{B\dot{X}}$ a $_{C\dot{Y}}$ – tedy vynásobíme $\varepsilon^{BC}\cdot\varepsilon^{\dot{X}\dot{Y}}$

~~pak např. 1. člen je~~ $\cancel{\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\varepsilon_{\dot{Y}\dot{Z}}\varepsilon^{\dot{X}\dot{Y}}}$ Pak první dva členy vypadnou

neb $A_{ABCD}\cdot\varepsilon^{BC} = 0$ ... $\cancel{\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}(-\delta^{\dot{X}}_{\dot{Z}})}$

a dostaneme

$$2\,\underset{\text{je sym.}}{C_{AD\dot{W}\dot{Z}}} - \frac{1}{2}\varepsilon_{AD}\varepsilon_{\dot{W}\dot{Z}}(B+\bar{B}) = 0$$

rovnici symetrisujeme ⟹ $C_{\dots} = 0 \overset{\text{ale}}{\Rightarrow} \varepsilon_{AD}\varepsilon_{\dot{W}\dot{Z}}(B+\bar{B}) = 0$