VEKTOROVÉ FIBROVANÉ PROSTORY

Fibrované prostory
Vektorové bundly
Trivializace vektorového bundlu
Kovariantní derivace na vektorových bundlech
Pseudoderivace na vektorových bundlech
Antisymetrické formy s hodnotami ve vektorových bundlech
Vnější kovariantní derivace na tečném bundlu
Křivost kovariantní derivace na vektorovém bundlu
Vlastnosti tenzoru křivosti

Fibrované prostory

Def:

$M, \mathbb{P}$ variety

$\mathbb{P}M$ je fiber bundle nad M se stand. fibrem $\mathbb{P}$ $\equiv$

$\mathbb{P}M$ je dif. varieta

$\pi : \mathbb{P}M \to M$ je diferencovatelná projekce

$\mathbb{P}M$ je lokálně triviální, t.j.

$\forall x \; \exists U$ okolí x $\quad \pi^{-1}(U) \underset{\uparrow}{\cong} U \times \mathbb{P}$

diffeomorfismus

$\mathbb{P}_x M$ je fiber nad $x \in M$ $\equiv$ $\mathbb{P}_x M = \pi^{-1} x$

pokud má $\mathbb{P}$ dodatečnou strukturu, která je respektována difeomorf. $\cong$ v definici mluvíme o fibr. bundle s příslušnou strukturou

typicky: vektorové f. b., grupové f. b., L. alg. f. b.

Vektorové fibrované bundly

Def:

M varieta, $\mathbb{A}$ vekt. prostor

$\mathbb{A}M$ je vektorový bundl nad M se standardním fibrem $\mathbb{A}$ $\equiv$

$\mathbb{A}M$ je dif. varieta

$\pi : \mathbb{A}M \to M$ diferencovatelná projekce

$\mathbb{A}M$ lokálně triviální, tj.

$\forall x \in M \quad \exists\, U \subset M$ okolí $x \qquad \pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{A}$

$\mathbb{A}_x M$ je fibr nad $x \in M$ $\equiv$ $\mathbb{A}_x M = \pi^{-1} x$

Def:

$\mathbb{A}M$ vektorový bundl nad M

a je řez $\mathbb{A}M$ $\equiv$

$a : M \to \mathbb{A}M$ (diferencovatelné)

$\pi a = id$

Sect $\mathbb{A}M$ $\equiv$ prostor všech řezů $\mathbb{A}M$

Def:

$\mathbb{A}M$ vekt. bundl nad M se stand. fibrem $\mathbb{A}$

$\mathbb{A}^k_l M$ tenz. bundl nad M vygenerovaný z $\mathbb{A}M$ $\equiv$

$\mathbb{A}^k_l M = (\underbrace{\mathbb{A} \otimes \ldots \otimes \mathbb{A}}_{k} \otimes \underbrace{\mathbb{A}^* \otimes \ldots \otimes \mathbb{A}^*}_{l}) M$

Lema:

$\mathbb{A}^k_l M$ je vekt. bundl nad M se stand. fibrem $\mathbb{A}^k_l$

Trivializace vektorového bundlu

Def

AM vekt. bundl $\qquad \dim A = D$

$U_{(\alpha)}$ soubor okolí pokrývajících varietu M

trivializace je soubor bazí ${}^{(\alpha)}E_A$ defin. na okolích $U_{(\alpha)}$

tj. ${}^{(\alpha)}E_A$ $A = 1 \dots D$ jsou lin. nezáv. řezy $A^{(\alpha)}U$

nechť ${}^{(\alpha)}E^A$ je duální báze

tyto báze definují

(i) trivializující zobr.

$${}^{(\alpha)}\Phi_x : A_xM \to \mathbb{R}^D \qquad x \in U_{(\alpha)}$$

$${}^{(\alpha)}\Phi : \psi \to \psi^A = {}^{(\alpha)}E^A \cdot \psi \qquad \text{tj.} \quad \psi = \psi^A\, {}^{(\alpha)}E_A$$

(ii) inverzní trivial. zobr.

$${}^{(\alpha)}\Phi_x^{-1} : \mathbb{R}^D \to A_xM \qquad x \in U_{(\alpha)}$$

$${}^{(\alpha)}\Phi^{-1} : \psi^A \to \psi = \psi^A\, {}^{(\alpha)}E_A$$

Pozn: lze ztotožnit ${}^{(\alpha)}\Phi^A \equiv {}^{(\alpha)}E^A$ a ${}^{(\alpha)}\Phi^{-1}{}_A = {}^{(\alpha)}E_A$

(iii) přechodové zobrazení

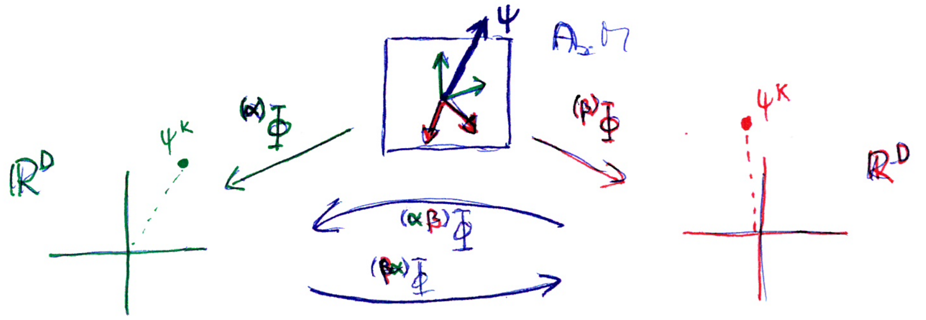
$${}^{(\alpha\beta)}\Phi_x : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^D \qquad x \in U_{(\alpha)} \cap U_{(\beta)}$$

$${}^{(\alpha\beta)}\Phi = {}^{(\alpha)}\Phi \circ {}^{(\beta)}\Phi^{-1} : \psi^A \to {}^{(\alpha\beta)}\Phi^A{}_B\, \psi^B$$

platí

$${}^{(\beta)}E_B = {}^{(\alpha)}E_A\, {}^{(\alpha\beta)}\Phi^A{}_B \qquad {}^{(\alpha)}E^A = {}^{(\alpha\beta)}\Phi^A{}_B\, {}^{(\beta)}E^B$$

vskutku $\quad {}^{(\alpha)}\Phi^A(\psi) = {}^{(\alpha)}E^A \cdot \psi = {}^{(\alpha\beta)}\Phi({}^{(\beta)}\Phi(\psi)) = {}^{(\alpha\beta)}\Phi^A{}_B\, {}^{(\beta)}E^B \cdot \psi \quad \Uparrow$

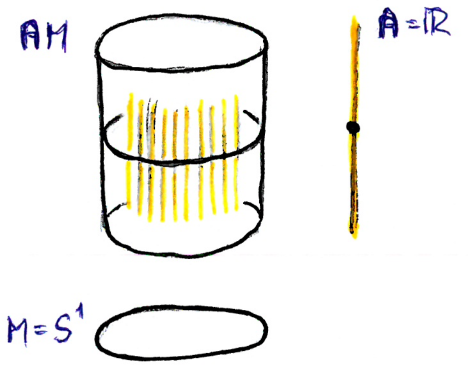


Pomocí souboru přechodových zobr. ${}^{(\alpha\beta)}\Phi$ lze zachytit netriviální strukturu vekt. bundlu (tj. odlišnost od triv. b. $A \times M$)

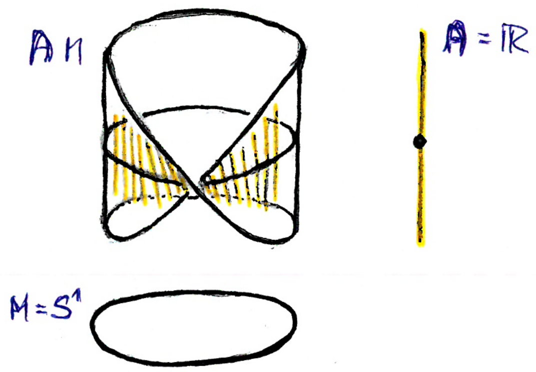
Př: Lineární bundle nad S^1

$M = S^1$ $\qquad A \cong \mathbb{R}$

triviální bundl



twistovaný bundl

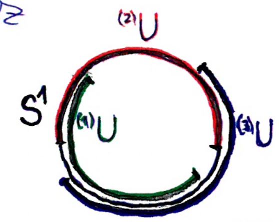


tyto bundly jsou neekvivalentní:

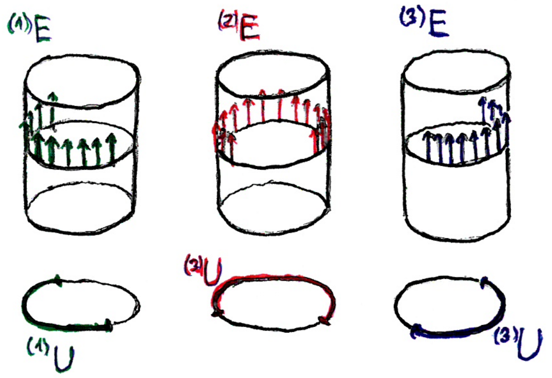
existuje gl. nedeg. řez

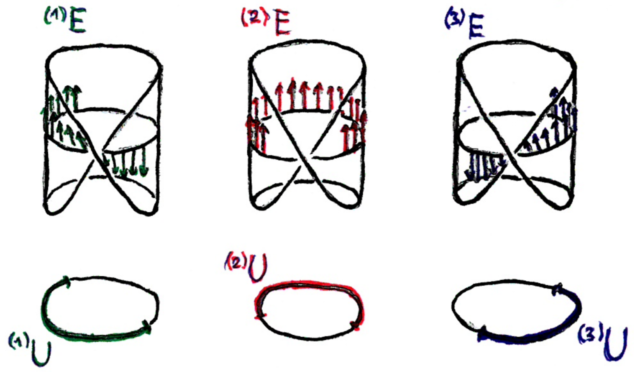
neexistuje gl. nedeg. řez

trivializace:



zvolme 3 okolí ${}^{(\alpha)}U$ na každém (jednotkovou) bázi v lineárním bundle





$${}^{(12)}\Phi = [1]$$
$${}^{(23)}\Phi = [1]$$
$${}^{(31)}\Phi = [1]$$

$${}^{(12)}\Phi = [1]$$
$${}^{(21)}\Phi = [1]$$
$${}^{(31)}\Phi = [-1]$$

Kovariantní derivace na vekt. bundlech

Def:

nechť AM je vekt. bundl

D_ξ je kovariantní derivace na AM ve směru $\xi \in TM$ $\equiv$

$D_\xi : \mathrm{Sect}\, AM \to \mathrm{Sect}\, AM$

$D_\xi \phi|_x$ je dáno znalostí ϕ na lib. okolí x (lokalita)

$$D_\xi(\phi+\psi) = D_\xi \phi + D_\xi \psi \qquad \phi, \psi \in \mathrm{Sect}\, AM$$
$$D_\xi(f\phi) = (\xi \cdot df)\phi + f D_\xi \phi \qquad \xi, \zeta \in TM$$
$$D_{(f\xi+\zeta)}\phi = f D_\xi \phi + D_\zeta \phi \qquad f \in \mathcal{F}M$$

D je kovariantní diferenciál $\equiv$

$D : \mathrm{Sect}\, AM \to \mathrm{Sect}\, (T^* \otimes A)M$

$\xi \cdot D\phi = D_\xi \phi$

Pozn:

ultralokalita derivace D_ξ v argumentu ξ umožňuje definici kov. diferenciálu

Pozn:

kov. der. lze definovat na každém tensorovém bundlu $A^p_q M$

tyto obecně nemusejí souviset, bude ale přirozené používat na všech tenz. bundlech "stejnou" kov. derivaci

tu lze specifikovat chováním vůči tens. souč. a kontrakci

Věta:

nechť D je kov. der. na AM

podmínky

$$D(\phi \otimes \psi) = (D\phi)\otimes\psi + \phi \otimes (D\psi)$$
$$D\, C\phi = C\, D\phi$$

ϕ, ψ řezy tenz. bundlů

určují jednoznačně kov. der. na všech tenz. bundlech $A^p_q M$

důkaz:

komutace s kontrakcí indukuje kov. der. na $A^* M$

Leibn. prav. rozšiřuje der. na libovolný $A^p_q M$

Kovariantní derivace na více vekt. bundlech

máme-li kov. der. na různých vekt. bundlech, můžeme definovat kov. der. působící na jejich součinu

Def

${}^{E}D$ kov. der. na EM

${}^{F}D$ kov. der. na FM

D je jejich rozšíření na $E\otimes FM$ $\equiv$

$$D(\phi\otimes\psi) = ({}^{E}D\phi)\otimes\psi + \phi\otimes({}^{F}D\psi) \qquad \text{pro} \quad \begin{array}{l}\phi\in\mathrm{Sect}\,EM\\ \psi\in\mathrm{Sect}\,FM\end{array}$$

takto lze D rozšířit na libovolný tenz. bundl $(E^{k}_{l}\otimes F^{m}_{n})\,M$

Př:

kov. der. ∇ na tečném bundl je příkladem kov. der. na vektorovém bundl TM

nicméně kov. der. na tečném bundl má jemnější strukturu než kov. der. na obecném vekt. bundlu – lze pro ni definovat torzi – zde se využívá, že derivovaný objekt má stejné indexy jako směr derivování

Často budeme pracovat s rozšířením kov. der D na AM na tečný bundl pomocí kov. der. ∇ na TM. To je myšleno přesně ve smyslu definice výše.
Někdy ji budeme označovat výslednou kov. der. stejným symbolem jako derivaci na AM

Vsuvka:

Pseudoderivace na vektorových bundlech

Def: pseudoderivace

nechť $\mathcal{A}M$ je vekt. bundl a $\mathcal{A}^k_l M$ příslušné tenz. bundly

$\mathbb{M}$ je pseudoderivace na $\mathcal{A}M$ $\equiv$

$$\mathbb{M} : \operatorname{Sect} \mathcal{A}^k_l M \to \operatorname{Sect} \mathcal{A}^k_l M$$

$$\mathbb{M}(\phi + \psi) = \mathbb{M}\phi + \mathbb{M}\psi$$

$$\mathbb{M}(\phi\psi) = (\mathbb{M}\phi)\psi + \phi(\mathbb{M}\psi)$$

$$\mathbb{M}\, \mathcal{C}\phi = \mathcal{C}\, \mathbb{M}\phi$$

$$\mathbb{M} f = 0$$

ϕ, ψ řezy tenz. bundlů

$f \in \mathcal{F}M$

Věta akce pseudoderivace

pseudoderivace je ultralokální operátor jehož akce je dána akcí na vekt. bundlu $\mathcal{A}M$

$$\mathbb{M}\phi^K = M^K{}_L\, \phi^L$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{M}\, \mathcal{X}^{KL\ldots}_{MN\ldots} = M^K{}_A\, \mathcal{X}^{AL\ldots}_{MN\ldots} + M^L{}_A\, \mathcal{X}^{KA\ldots}_{MN\ldots} + \ldots - M^A{}_M\, \mathcal{X}^{KL\ldots}_{AN\ldots} - M^A{}_N\, \mathcal{X}^{KL\ldots}_{MA\ldots} - \ldots$$

důkaz

viz pseudoderivace na TM

vlastnosti pseudoderivace umožňují rozšířit akci z $\mathcal{A}M$ na $\mathcal{A}^* M$ a následně na všechny $\mathcal{A}^k_l M$

Pozn:

pseudoderivace lze rozšířit tak, že přidává tečné indexy, které se neúčastní operací výše, např. $\mathbb{A}_m$, $\mathbb{F}_{mn}$, atd.

Def pseudoderivace na tenz. součinu vekt. bundlů

nechť $\mathbb{A}$ je pseudoder. na $\mathbb{E}M$ a $\mathbb{B}$ je pseudoder. na $\mathbb{F}M$

na $(\mathbb{E}\otimes\mathbb{F})M$ lze definovat pseudoderivace

$$\mathbb{M} = \mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$$

$$\mathbb{M}\, \mathcal{X}^{K\ldots\mathfrak{m}\ldots}_{L\ldots\mathfrak{n}\ldots} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{působí pouze na } {K \atop L}}}{\mathbb{A}}\, \mathcal{X}^{K\ldots\mathfrak{m}\ldots}_{L\ldots\mathfrak{n}\ldots} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{působí pouze na } {\mathfrak{m} \atop \mathfrak{n}}}}{\mathbb{B}}\, \mathcal{X}^{K\ldots\mathfrak{m}\ldots}_{L\ldots\mathfrak{n}\ldots}$$

$$= A^K{}_C\, \mathcal{X}^{C\ldots\mathfrak{m}\ldots}_{L\ldots\mathfrak{n}\ldots} + \ldots - A^C{}_L\, \mathcal{X}^{K\ldots\mathfrak{m}\ldots}_{C\ldots\mathfrak{n}\ldots} - \ldots + B^{\mathfrak{m}}{}_{\mathfrak{c}}\, \mathcal{X}^{K\ldots\mathfrak{c}\ldots}_{L\ldots\mathfrak{n}\ldots} + \ldots - B^{\mathfrak{c}}{}_{\mathfrak{n}}\, \mathcal{X}^{K\ldots\mathfrak{m}\ldots}_{L\ldots\mathfrak{c}\ldots} - \ldots$$

tato pseudoderivace splňuje všechny vlastnosti pseudoder. na $(\mathbb{E}\otimes\mathbb{F})M$ včetně Leibniz. pravidla pro tenz. v součinovém tvaru

$$\mathbb{M}(\phi^{K\ldots}_{L\ldots}\, \psi^{\mathfrak{m}\ldots}_{\mathfrak{n}\ldots}) = (\mathbb{A}\phi^{K\ldots}_{L\ldots})\, \psi^{\mathfrak{m}\ldots}_{\mathfrak{n}\ldots} + \phi^{K\ldots}_{L\ldots}\, (\mathbb{B}\psi^{\mathfrak{m}\ldots}_{\mathfrak{n}\ldots})$$

Lema

nechť $D, \tilde{D}$ jsou kov. der. def. na tenz. bundlech $A^k_l M$
jejich rozdíl

$$\mathbb{A}\, \mathcal{X} = D\mathcal{X} - \tilde{D}\mathcal{X} \qquad \mathcal{X} \in \mathcal{S}ect\, A^k_l M$$

je pseudoderivace na $A^k_l M$, tj. ultralokální zobr. v $\mathcal{X}$ dané svojí akcí na AM

$$A_m \phi^A = A_m{}^A{}_K \phi^K \qquad \phi \in \mathcal{S}ect\, AM$$

$$A_m \mathcal{X}^{AB\ldots}_{CD\ldots} = A_m{}^A{}_K \mathcal{X}^{KB\ldots}_{CD\ldots} + A_m{}^B{}_K \mathcal{X}^{AK\ldots}_{CD\ldots} + \ldots - A_m{}^L{}_C \mathcal{X}^{AB\ldots}_{LD\ldots} - A_m{}^L{}_D \mathcal{X}^{AB\ldots}_{CL\ldots} - \ldots$$

Def:

$A_m{}^K{}_L$ nazýváme rozdílový tenzor derivací D a $\tilde{D}$

Př:

pro tenzor typu $A^1_1 M$ dostáváme

$$D_m M^A{}_B - \tilde{D}_m M^A{}_B = A_m M^A{}_B = A_m{}^A{}_K M^K{}_B - A_m{}^K{}_B M^A{}_K = [A_m, M]^A{}_B$$

kde $[\,,\,]$ je komutátor "maticového" násobení

Def:

nechť E_A je trivializace (báze) v AM

∂ je souřadnicová derivace trivializace E_A $\equiv$

$$\partial E_A = 0 \qquad \text{resp.} \qquad \partial E^A = 0$$

akce na $\phi \in \mathcal{S}ect\, AM$ pak je

$$\partial \phi = (d\phi^A)\, E_A \qquad \text{tj} \quad (\partial\phi)^A_m = \partial_m \phi^A = \phi^A{}_{,m} \qquad \phi = \phi^A E_A$$

rozdílový tenz. $A_m{}^K{}_L$ kov. der. D vůči der. ∂
nazýváme vektorový potenciál D

$$D_m = \partial_m + A_m \qquad A_m \text{ generováno tenzorem } A_m{}^K{}_L$$

Lemma Rozdílový tenzor na $(E\otimes F)M$

nechť $D, \tilde{D}$ jsou kov. der. na $(E\otimes F)M$ získané z derivací ${}^E D, {}^E\tilde{D}$ na EM a ${}^F D, {}^F\tilde{D}$ na FM pak rozdílová pseudoderivace

$$A = D - \tilde{D}$$

má strukturu

$$A = {}^E A \oplus {}^F A$$

kde ${}^E A = {}^E D - {}^E\tilde{D}$ působí pouze na indexy z EM a

${}^F A = {}^F D - {}^F\tilde{D}$ působí pouze na indexy z FM

konkrétně

$$A_m \mathcal{X}^{K\dots\mathfrak{m}\dots}_{L\dots\mathfrak{n}\dots} = {}^E A_m{}^K{}_C \mathcal{X}^{C\dots\mathfrak{m}\dots}_{L\dots\mathfrak{n}\dots} + \dots - {}^E A_m{}^C{}_L \mathcal{X}^{K\dots\mathfrak{m}\dots}_{C\dots\mathfrak{n}\dots} - \dots \qquad \text{akce } {}^E A$$
$$+ {}^F A_m{}^{\mathfrak{m}}{}_{\mathfrak{c}} \mathcal{X}^{K\dots\mathfrak{c}\dots}_{L\dots\mathfrak{n}\dots} + \dots - {}^F A_m{}^{\mathfrak{c}}{}_{\mathfrak{n}} \mathcal{X}^{K\dots\mathfrak{m}\dots}_{L\dots\mathfrak{c}\dots} - \dots \qquad \text{akce } {}^F A$$

důkaz:

stačí ověřit akci $D-\tilde{D}$ pro tenzory v součinovém tvaru

$$\mathcal{X}^{K\dots\mathfrak{m}\dots}_{L\dots\mathfrak{n}\dots} = R^{K\dots}_{L\dots} \otimes S^{\mathfrak{m}\dots}_{\mathfrak{n}\dots}$$

$$[D-\tilde{D}]X = ([D-\tilde{D}]R)\otimes S + R\otimes([D-\tilde{D}]S) = ({}^E A R)\otimes S + R\otimes({}^F A S)$$

což je přesný význam výše naznačené akce

$$[{}^E A \oplus {}^F A](R\otimes S)$$

Věta Komponenty kov. derivace

nechť M je varieta se souř. x^a a ∇ kov. der. na TM daná christoffel. koeficienty Γ^a_{mn}

nechť AM je vekt. bundle s trivializací E_A, ∂

D je kov. der. s vekt. potenciálem $A_m{}^K{}_L$

komponenty kov. der. obecného tenzoru z $(T\otimes A)M$ jsou

$$D_a \mathcal{X}^{m\dots M\dots}_{n\dots N\dots} = \mathcal{X}^{m\dots M\dots}_{n\dots N\dots,a} + \Gamma^m_{ak}\mathcal{X}^{k\dots M\dots}_{n\dots N\dots} + \dots - \Gamma^k_{an}\mathcal{X}^{m\dots M\dots}_{k\dots N\dots} - \dots$$
$$+ A_m{}^M{}_K \mathcal{X}^{m\dots K\dots}_{n\dots N\dots} + \dots - A_m{}^K{}_N \mathcal{X}^{m\dots M\dots}_{n\dots K\dots} - \dots$$

neboli

$$D = \partial + \mathbb{\Gamma} \oplus A$$

kde ∂ je daná souř. der. na TM a trivializací na AM

Antisymetrické formy s hodnotami ve vekt. bundlu

Def:

AM vekt. bundl nad varietou M

$\Lambda^p A^q_\ell M$ je vekt. bundl A^q_ℓ-značných antisym. forem na $M \equiv$

$$\Lambda^p A^q_\ell M = (\Lambda^p \otimes A^q_\ell)\, M$$

tj. jedná se antisym. formy na M stupně p s hodnotami v $A^q_\ell M$

mají $\phi_{a_1 \dots a_p}{}^{M\dots}{}_{N\dots}$

Def

na $\Lambda^p A^q_\ell M$ máme přirozeně zobecněný vnější součin

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots = \binom{p}{p_1\, p_2 \dots}\, \mathcal{A}(\phi_1 \otimes \phi_2 \otimes \dots) \qquad \in \Lambda^p A^q_\ell M$$

↑ antisymetrizace v ΛM

v indexech

$$\phi_{1\, a_1 \dots a_{p_1}}{}^{M_1\dots}{}_{N_1\dots} \wedge \phi_{2\, a_{p_1+1} \dots a_{p_1+p_2}}{}^{M_2\dots}{}_{N_2\dots} \wedge \dots = \binom{p}{p_1\, p_2 \dots}\, \phi_{1[a_1 \dots a_{p_1}|}{}^{M_1\dots}{}_{N_1\dots|}\, \phi_{2\, a_{p_1+1} \dots a_{p_1+p_2}|}{}^{M_2\dots}{}_{N_2\dots|} \dots {}_{a_p]}$$

kde

$$\phi_i \in \Lambda^{p_i} A^{k_i}_{l_i} M \qquad p = \sum_i p_i \qquad k = \sum_i k_i \qquad l = \sum_i l_i$$

Př:

$$\phi_{a}{}^{M\dots}{}_{K\dots} \wedge \psi_{b}{}^{N\dots}{}_{L\dots} = \phi_{a}{}^{M\dots}{}_{K\dots}\psi_{b}{}^{N\dots}{}_{L\dots} - \phi_{b}{}^{M\dots}{}_{K\dots}\psi_{a}{}^{N\dots}{}_{L\dots}$$

$$\phi_{a}{}^{M\dots}{}_{K\dots} \wedge \psi_{bc}{}^{N\dots}{}_{L\dots} = \phi_{a}{}^{M\dots}{}_{K\dots}\psi_{bc}{}^{N\dots}{}_{L\dots} + \phi_{b}{}^{M}{}_{K}\psi_{ca}{}^{N\dots}{}_{L\dots} + \phi_{c}{}^{M\dots}{}_{K\dots}\psi_{ab}{}^{N\dots}{}_{L\dots}$$

pozice fibrovaných indexů u členů v součinu zůstává stejná (prostý tenz. součin)

antisymetrizují se pouze tečné indexy

Def: Kovariantní vnější derivace

nechť D je kov. derivace na vekt. bundlu AM

$\overset{D}{d}$ je kovariantní vnější derivace na $\Lambda^p A^q_e M \equiv$

$\overset{D}{d}: \operatorname{Sect} \Lambda^p A^q_e M \to \operatorname{Sect} \Lambda^{p+1} A^q_e M$

$\overset{D}{d}(\phi + \psi) = \overset{D}{d}\phi + \overset{D}{d}\psi$

$\overset{D}{d}(\phi \wedge \psi) = (\overset{D}{d}\phi)\wedge\psi + (-1)^p \phi \wedge (\overset{D}{d}\psi)$ pro $\phi \in \operatorname{Sect}\Lambda^p A^q_e M$

$\overset{D}{d}\phi = D\phi$ pro $p=0$ tj. $\phi \in \operatorname{Sect} A^q_e M$

$\overset{D}{d}\phi = d\phi$ pro $q, e = 0$ tj. $\phi \in \operatorname{Sect} \Lambda^p M$

Pozn: pro definici není potřeba specifikovat $\overset{D}{d}\overset{D}{d}$
tento výraz budeme zkoumat v souvislosti s křivostí
pro $\phi \in \Lambda^p M$ poslední pravidlo dává $dd\phi = 0$, toto nebude pravda obecně

Lema Vyjádření v souřadnicích na M

nechť x^a jsou souřadnice na M

$$\phi = \sum_{a_1 < \dots < a_p} \phi_{a_1 \dots a_p}\, dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p} \qquad \phi \in \operatorname{Sect} \Lambda^p A^q_e M$$

kde $\phi_{a_1 \dots a_p} \in \operatorname{Sect} A^q_e M$ jsou komponenty z hlediska těchto ind.
ale abstraktní fibrované tensory

pak lze kov. vnější der. psát

$$\overset{D}{d}\phi = \sum_{a_1 < \dots < a_p} (D\phi_{a_1 \dots a_p}) \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$$

$$= (p+1) \sum_{a_0 < a_1 < \dots < a_p} (D_{[a_0} \phi_{a_1 \dots a_p]})\, dx^{a_0} \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$$

důkaz:
první řádek je použití linearity, Leibniz. pr. a $ddx^a = 0$
druhý řádek je rozpis $D\phi_{a_1 \dots a_p} = D_{a_0}\phi_{a_1 \dots a_p}\, dx^{a_0}$ a přeuspořádání indexů do uspořádané sumy – viz obdobné diskuze pro obyčejnou vnější derivaci

Pozn:
Tento vzorec platí vůči libovolným souřadnicím x^a a je konzistentní vůči změně souřadnic
zaručuje tak úplnost definice kovar. vnější derivace

Vnější derivace na $\Lambda^p M$ lze vyjádřit pomocí kov. der. ∇ na tečném bundlu TM. Připomeňme

$$d\omega = \nabla \wedge \omega + T \wedge \omega$$

kde T je torze derivace ∇

Tento vztah lze zobecnit pro vnější kov. der. na $\Lambda \mathcal{A} M$

Věta

nechť D je kov. der. na $\mathcal{A}M$ rozšířené na TM pomocí kov. der. ∇ s torzí T, pak

$$^D d_0 \phi = D \wedge \phi + T \wedge \phi \qquad \text{tj.}$$

$$^D d_{a_0} \phi_{a_1 \dots a_p}{}^{M\dots}_{N\dots} = D_{a_0} \wedge \phi_{a_1 \dots a_p}{}^{M\dots}_{N\dots} + T^k_{a_0 a_1} \wedge \phi_{|k| a_2 \dots a_p}{}^{M\dots}_{N\dots}$$

$$= (p+1)\, D_{[a_0} \phi_{a_1 \dots a_p]}{}^{M\dots}_{N\dots} + \binom{p+1}{2} T^k_{[a_0 a_1} \phi_{|k| a_2 \dots a_p]}{}^{M\dots}_{N\dots}$$

důkaz

plyne z rozšíření vnější der. na $\mathcal{A}M$

stačí uvažovat tenzory v součinovém tvaru

$$\phi_{a_1 \dots a_p}{}^{M\dots}_{N\dots} = \omega_{a_1 \dots a_p} \varphi^{M\dots}_{N\dots}$$

$$^D d\phi = (d\omega)\varphi + (^D d\varphi) \wedge \omega =$$

$$= (\nabla \wedge \omega + T \wedge \omega)\varphi + (D\varphi) \wedge \omega = (\varphi \nabla \wedge \omega + D\varphi \wedge \omega) + T \wedge \omega\varphi$$

$$= D \wedge (\omega\varphi) + T \wedge (\omega\varphi) = D \wedge \phi + T \wedge \phi$$

Pozn:

Zdůrazněme, že vnější kov. der. $^D d\phi$ nezávisí na volbě ∇

∇ může být libovolná a torze T se do vyjádření $^D d\phi$ dostává pouze volbou ∇ a týká se pouze ∇ na TM.

Křivost kovariantní der. na vekt. bundlu

Def Operátor křivosti

nechť D je kov. der. na vekt. bundlu AM

$\mathbb{F}_{\xi,\varsigma}$ je operátor křivosti ve směrech $\xi, \varsigma \in TM$ $\equiv$

$$\mathbb{F}_{\xi,\varsigma} = D_\xi D_\varsigma - D_\varsigma D_\xi - D_{[\xi,\varsigma]}$$

pokud máme kov. der. D rozšířenou na tenz. bundle $A^{\bullet}_{\bullet}M$
operátor křivosti působí na řezech $\mathfrak{Sect}\, A^{\bullet}_{\bullet}M$

Věta

operátor křivosti $\mathbb{F}_{\xi,\varsigma}$ na tenz. bundlech $A^{\bullet}_{\bullet}M$ je

- ultralokální v argumentech ξ a ς
- pseudoderivace v argumentu z $A^{\bullet}_{\bullet}M$

důkaz:

$$\mathbb{F}_{f\xi,\varsigma}\phi = D_{f\xi} D_\varsigma \phi - D_\varsigma D_{f\xi}\phi - D_{[f\xi,\varsigma]}\phi = f D_\xi D_\varsigma \phi - D_\varsigma(f D_\xi \phi) - D_{f[\xi,\varsigma] - \varsigma[f]\xi}\phi$$

$$= f\left(D_\xi D_\varsigma\phi - D_\varsigma D_\xi \phi - D_{[\xi,\varsigma]}\phi\right) - \varsigma[f] D_\xi \phi + \varsigma[f] D_\xi \phi = f\, \mathbb{F}_{\xi,\varsigma}\phi$$

$$\mathbb{F}_{\xi,\varsigma}(f\phi) = D_\xi D_\varsigma (f\phi) - D_\varsigma D_\xi (f\phi) - D_{[\xi,\varsigma]}(f\phi) =$$

$$= D_\xi(f D_\varsigma \phi) - D_\varsigma(f D_\xi\phi) - f D_{[\xi,\varsigma]}\phi + D_\xi(\varsigma[f]\phi) - D_\varsigma(\xi[f]\phi) - [\xi,\varsigma][f]\phi$$

$$= f\left(D_\xi D_\varsigma \phi - D_\varsigma D_\xi \phi - D_{[\xi,\varsigma]}\phi\right) + (\xi[f] - \xi[f]) D_\varsigma \phi - (\varsigma[f] - \varsigma[f]) D_\xi \phi$$

$$+ \left(\xi[\varsigma[\phi]] - \varsigma[\xi[f]] - [\xi,\varsigma][f]\right)\phi$$

$$= f\, \mathbb{F}_{\xi,\varsigma}\phi$$

$$\mathbb{F}_{\xi,\varsigma}(\phi\otimes\psi) = D_\xi D_\varsigma(\phi\otimes\psi) - D_\varsigma D_\xi(\phi\otimes\psi) - D_{[\xi,\varsigma]}(\phi\otimes\psi)$$

$$= D_\xi\left(D_\varsigma\phi\otimes\psi + \phi\otimes D_\varsigma\psi\right) - D_\varsigma\left(D_\xi\phi\otimes\psi + \phi\otimes D_\xi\psi\right) - D_{[\xi,\varsigma]}\phi\otimes\psi - \phi\otimes D_{[\xi,\varsigma]}\psi$$

$$= \left(D_\xi D_\varsigma\phi - D_\varsigma D_\xi\phi - D_{[\xi,\varsigma]}\phi\right)\otimes\psi + \phi\otimes\left(D_\xi D_\varsigma\psi - D_\varsigma D_\xi\psi - D_{[\xi,\varsigma]}\psi\right)$$

$$+ D_\varsigma\phi\otimes D_\xi\psi + D_\xi\phi\otimes D_\varsigma\psi - D_\xi\phi\otimes D_\varsigma\psi - D_\varsigma\phi\otimes D_\xi\psi$$

$$= (\mathbb{F}_{\xi,\varsigma}\phi)\otimes\psi + \phi\otimes(\mathbb{F}_{\xi,\varsigma}\psi)$$

ostatní vlastnosti pseudoderivace jsou přímočaré

Díky ultralokalitě $\mathbb{F}_{\xi,\varsigma}$ v argumentech ξ,ς umožňuje definovat operátor křivosti nezávislý na ξ a ς

Def Operátor křivosti

nechť D je kov. der. na vekt. bundlu $\mathbb{A}M$

$\mathbb{F}_{mn}$ je operátor křivosti =

$$\xi^m \varsigma^n \mathbb{F}_{mn} = \mathbb{F}_{\xi,\varsigma}$$

$\mathbb{F}_{mn}$ lze chápat jako operátor na tenz. bundlech $\mathbb{A}^{\otimes}_{e}M$

Podle věty výše je $\mathbb{F}_{mn}$ též pseudoderivace a její akce je dána působením na $\mathbb{A}M$

Def tenzor křivosti

akce operátoru křivosti na $\mathbb{A}M$ definuje tenzor křivosti $F_{mn}{}^{K}{}_{L}$

$$F_{\xi,\varsigma}{}^{K}{}_{L}\,\phi^{L} = \xi^m \varsigma^n F_{mn}{}^{K}{}_{L}\,\phi^{L} = \left[D_\xi D_\varsigma - D_\varsigma D_\xi - D_{[\xi,\varsigma]}\right]\phi^{K}$$

Věta

operátor křivosti $\mathbb{F}_{mn}$ lze zapsat

$$\mathbb{F}_{mn} = D_m D_n - D_n D_m + T^{k}_{mn} D_k$$

kde D je rozšířeno na $\mathbb{T}M$ pomocí libovolné der. ∇ s torzí T

důkaz:

$$\mathbb{F}_{\xi,\varsigma}\,\phi^{K\ldots}_{L\ldots} = D_\xi D_\varsigma \phi^{K\ldots}_{L\ldots} - D_\varsigma D_\xi \phi^{K\ldots}_{L\ldots} - D_{[\xi,\varsigma]}\phi^{K\ldots}_{L\ldots} = \xi^m D_m(\varsigma^n D_n \phi^{K\ldots}_{L\ldots}) - \varsigma^m D_m(\xi^n D_n \phi^{K\ldots}_{L\ldots}) - [\xi,\varsigma]^n D_n \phi^{K\ldots}_{L\ldots}$$

$$= \xi^m \varsigma^n (D_m D_n \phi^{K\ldots}_{L\ldots} - D_n D_m \phi^{K\ldots}_{L\ldots}) + (\xi^m \nabla_m \varsigma^n - \varsigma^m \nabla_m \xi^n - [\xi,\varsigma]^n) D_n \phi^{K\ldots}_{L\ldots}$$

$$= \xi^m \varsigma^n \left[D_m D_n - D_n D_m + T^{k}_{mn} D_k\right]\phi^{K\ldots}_{L\ldots}$$

Věta Zobecněné Ricciho identity

$$\mathbb{F}_{mn} X^{K\ldots}_{L\ldots} = \left[D_m D_n - D_n D_m + T^{k}_{mn} D_k\right] X^{K\ldots}_{L\ldots} =$$

$$= F_{mn}{}^{K}{}_{M}\, X^{M\ldots}_{L\ldots} + \ldots - F_{mn}{}^{M}{}_{L}\, X^{K\ldots}_{M\ldots} - \ldots$$

$$F_{mn}{}^{K}{}_{L}\,\phi^{L} = \left[D_m D_n - D_n D_m + T^{k}_{mn} D_k\right]\phi^{K}$$

chápeme-li $D_m X^{K\ldots}_{L\ldots} = {}^{D}d_m X^{K}_{L}$ jako objekt z $\mathbb{A}^1 \mathbb{A}^{\otimes}_{e} M$, můžeme psát

$$\mathbb{F}_{mn} X^{K\ldots}_{L\ldots} = {}^{D}d_m\, {}^{D}d_n\, X^{K\ldots}_{L\ldots}$$

důkaz: akce pseudoderivace a aplikace vztahu ${}^{D}d$ a D

Věta

D kov. derivace na $(A\otimes B)M$ daná kov. der

^{A}D na AM s tenzorem křivosti ^{A}F

^{B}D na BM s tenzorem křivosti ^{B}F

operátor křivosti D je dán

$$\mathbb{F} = {}^{A}\mathbb{F} \oplus {}^{B}F \qquad \text{tj.}$$

$$\mathbb{F}_{mn} X^{k..m..}_{l..n..} = {}^{A}F_{mn}{}^{k}{}_{c} X^{c..m..}_{l..n..} + \dots - {}^{A}F_{mn}{}^{c}{}_{l} X^{k..m..}_{c..n..} - \dots \qquad \text{akce } {}^{A}\mathbb{F}_{mn}$$

$$+ {}^{B}F_{mn}{}^{m}{}_{c} X^{k..c..}_{l..n..} + \dots - {}^{B}F_{mn}{}^{c}{}_{n} X^{k..m..}_{l..c..} - \dots \qquad \text{akce } {}^{B}F_{mn}$$

Lemma

v případě, kdy jeden z vekt. bundlů je tečný bundl TM a na něm máme kov. der. ∇ s tenzorem křivosti $R_{mn}{}^{k}{}_{l}$ jak

$$[D_m D_n - D_n D_m + T_{mn}{}^{k} D_k]\, X^{a..k..}_{b..l..} = \mathbb{R}_{mn} X^{a..k..}_{b..l..} + \mathbb{F}_{mn} X^{a..k..}_{b..l..}$$

působí pouze na $\frac{a..}{b..}$ působí pouze na $\frac{k..}{l..}$

vše plyne z přímočaré aplikace vlastností pseudoderivace na součinu vektorových bundlů

Věta

nechť D je kov. der. na AM a $\phi \in \mathrm{Sect}\,\Lambda^{p} A^{k}_{l} M$ jak

$$^{D}d\, ^{D}d\, \phi = \mathbb{F}\wedge\phi \qquad \text{tj.}$$

$$^{D}d_m\, ^{D}d_n\, \phi_{a_1\dots a_p}{}^{k..}_{l..} = \mathbb{F}_{mn} \wedge \phi_{a_1\dots a_p}{}^{k..}_{l..}$$

působí mezi tečnými indexy mn a $a_1\dots a_p$

působí jako pseudoderivace na $\frac{k}{l}$

$$= \binom{p}{2} F_{[mn}{}^{k}{}_{A}\, \phi_{a_1\dots a_p]}{}^{A\dots}_{l\dots} + \dots - \binom{p}{2} F_{[mn}{}^{A}{}_{l}\, \phi_{a_1\dots a_p]}{}^{k\dots}_{A\dots} - \dots$$

$^{D}d\,^{D}d$ není tak nulové, ale je to ultralokální operace daná křivostí

důkaz:

stačí provést pro tenzory součinového tvaru $\phi_{a_1\dots a_p}{}^{k..}_{l..} = \varphi^{k..}_{l..}\,\omega_{a_1\dots a_p}$

$$^{D}d\,^{D}d(\varphi\omega) = {}^{D}d\big(({}^{D}d\varphi)\wedge\omega + \varphi\, d\omega\big) = ({}^{D}d\,^{D}d\varphi)\wedge\omega - \cancel{D\varphi\wedge d\omega} + \cancel{D\varphi\wedge d\omega} + \varphi\,\underbrace{dd\omega}_{0}$$

$$= (\mathbb{F}\varphi)\wedge\omega = \mathbb{F}\wedge(\varphi\omega)$$

Věta

$D, \tilde D$ kov. der. na AM s rozdíl. tenzorem $A_m{}^k{}_l$ tj.

$$D\phi^k - \tilde D\phi^k = A_m{}^k{}_l\, \phi^l$$

rozdíl tenzorů křivosti F a $\tilde F$ je

$$F - \tilde F = {}^{\tilde D}d A + [A, A] = {}^{D}d A - [A, A] \qquad \text{neboli}$$

$$F_{mn} - \tilde F_{mn} = {}^{\tilde D}d_m A_n + A_m\cdot A_n - A_n\cdot A_m = {}^{D}d_m A_n - A_m\cdot A_n + A_n\cdot A_m \qquad \text{neboli}$$

$$F_{mn}{}^k{}_l - \tilde F_{mn}{}^k{}_l = {}^{\tilde D}d_m A_n{}^k{}_l + A_m{}^k{}_c A_n{}^c{}_l - A_n{}^k{}_c A_m{}^c{}_l = {}^{D}d_m A_n{}^k{}_l - A_m{}^k{}_c A_n{}^c{}_l + A_n{}^k{}_c A_m{}^c{}_l$$

zvolíme-li rozšíření $D, \tilde D$ na TM pomocí ∇ bez torze, máme

$$F - \tilde F = \tilde D \wedge A + [A, A] = D\wedge A - [A, A] \qquad \text{tj.}$$

$$F_{mn} - \tilde F_{mn} = \tilde D_m A_n - \tilde D_n A_m + A_m\cdot A_n - A_n\cdot A_m = D_m A_n - D_n A_m - A_m\cdot A_n + A_n\cdot A_m$$

Pozn:

člen $[A_m, A_n] = A_m\cdot A_n - A_n\cdot A_m$ lze též zapsat $A_m \wedge A_n$

tento člen není nulový díky nekomutativitě "maticového" násobení.

důkaz:

1) $F_{mn}\cdot\phi = [D_m D_n - D_n D_m + T^k_{mn} D_k]\phi = D_m(\tilde D_n\phi + A_n\cdot\phi) - D_n(\tilde D_m\phi + A_m\cdot\phi) + T^k_{mn}\tilde D_k\phi + T^k_{mn}A_k\cdot\phi$

$$= \tilde D_m\tilde D_n\phi - \tilde D_n\tilde D_m\phi + T^k_{mn}\tilde D_k\phi + \tilde D_m(A_n\cdot\phi) - \tilde D_n(A_m\cdot\phi)$$
$$+ A_m\cdot\tilde D_n\phi - A_n\cdot\tilde D_m\phi + T^k_{mn}A_k\cdot\phi + A_m\cdot A_n\cdot\phi - A_n\cdot A_m\cdot\phi$$
$$= \tilde F_{mn}\cdot\phi + (\tilde D_m A_n - \tilde D_n A_m + T^k_{mn}A_k)\cdot\phi + (A_m\cdot A_n - A_n\cdot A_m)\cdot\phi$$
$$+ \cancel{A_m\cdot\tilde D_n\phi} - \cancel{A_n\cdot\tilde D_m\phi} + \cancel{A_n\cdot\tilde D_m\phi} - \cancel{A_m\cdot\tilde D_n\phi}$$
$$= (\tilde F_{mn} + {}^{\tilde D}d_m A_n + [A_m, A_n])\cdot\phi$$

druhá varianta lze získat záměnou $D \leftrightarrow \tilde D$ $\quad A \leftrightarrow -A$

nebo pomocí vztahu

$$D_m A_n = \tilde D_m A_n + [A_m, A_n] \Rightarrow D_m\wedge A_n = D_m A_n - D_n A_m = \tilde D_m \wedge A_n + 2[A_m, A_n]$$

2) pro $T = 0$ máme ${}^{D}d A = D\wedge A$

Věta

nechť ∂ je souř. derivace trivializace E_A pak tenzor křivosti derivace ∂ je nulový

důkaz

$$F_{\xi\varsigma}\cdot E_A = \partial_\xi\partial_\varsigma E_A - \partial_\varsigma\partial_\xi E_A - \partial_{[\xi,\varsigma]}E_A = 0 \qquad \text{díky } \partial E_A = 0$$

Věta

nechť D je dána vektorový potenciál $A_m{}^k{}_l$ vůči trivializaci E_A, ∂

$$F_{mn} = {}^{\partial}d_m A_n + [A_m, A_n] = \partial_m\wedge A_n + [A_m, A_n]$$

kde ∂ je rozšířena na TM jako souř. derivace bez torze

Vlastnosti tenzoru křivosti

Věta: Bianchiho identity

D kov. der. na $\mathbb{A}M$ s tenzorem křivosti $F_{mn}{}^k{}_l$ pak

$$\overset{D}{d} F = 0 \qquad \text{tj.} \qquad \overset{D}{d}_{\underline{a}} F_{\underline{bc}} = 0$$

pokud rozšíříme D na $\mathbb{T}M$ bez torze, platí

$$D_{[\underline{a}} F_{\underline{bc}]} = 0$$

důkaz:

$$\overset{D}{d}\,\overset{D}{d}\,\overset{D}{d}\phi = \overset{D}{d}(\overset{D}{d}\overset{D}{d}\phi) = \overset{D}{d}(F\cdot\phi) = (\overset{D}{d}F)\cdot\phi + \underline{F\wedge\overset{D}{d}\phi}$$

$$= \overset{D}{d}\,\overset{D}{d}(\overset{D}{d}\phi) = F\wedge\overset{D}{d}\phi = \underline{F\wedge\overset{D}{d}\phi}$$

$$\Rightarrow \overset{D}{d}F = 0$$

pro rozšíření s nulovou torzí máme

$$\overset{D}{d}_{\underline{a}} F_{\underline{bc}} = D_{\underline{a}}\wedge F_{\underline{bc}} = 3\, D_{[\underline{a}} F_{\underline{bc}]}$$

Pozn.:

pro kov. der. ∇ na $\mathbb{T}M$ tak dostáváme elegantní důkaz Bianchiho identit (∇ bez torze)

$$\nabla_{[\underline{a}} R_{\underline{bc}]}{}^k{}_l = 0 \iff \overset{\nabla}{d} R = 0 \quad \text{kde chápeme } R \in \Lambda^2\mathbb{T}^1_1 M$$

argument funguje i pro ∇ s torzí

Věta Zákon zachování

M varieta s metrikou g a Levi-Civitovou der. ∇

$$\nabla g = 0 \qquad T = 0$$

D kov. der. na AM rozšířené na TM pomocí ∇

platí

$$D_m D_n F^{mn\,k}{}_l = 0$$

kde F je tenzor křivosti D

Pozn.:

identitu lze chápat jako "lokální zákon zachování"

$$D_m J^{m\,k}{}_l = 0$$

kde

$$J^{m\,k}{}_l = D_n F^{mn\,k}{}_l$$

důkaz:

$$2 D_m D_n F^{mn} = [D_m D_n - D_n D_m] F^{mn} = \mathbb{R}_{mn} F^{mn} + \mathbb{F}_{mn} F^{mn} =$$

$$= R_{mn}{}^m{}_k F^{kn} + R_{mn}{}^n{}_k F^{mk} + [F_{mn}, F^{mn}] =$$

$$= \underbrace{Ric_{nk} F^{kn}}_{0} - \underbrace{Ric_{mk} F^{mk}}_{0} + \underbrace{F_{mn} \cdot F^{mn} - F^{mn} \cdot F_{mn}}_{0}$$

$$= 0$$

kde jsme užili symetrii Ric_{ab}

Vnější kovariantní derivace na tečném bundlu

Speciální případ A^k_l-značných forem je, když za vekt. bundl AM zvolíme přímo tečný bundl TM. Budeme tak pracovat s $T^k_l M$-značnými formami, tj. objekty

$$\omega_{a_1 \dots a_p}{}^{m\dots}{}_{n\dots} \in \Lambda^p T^k_l M$$

Na formových indexech $a_1 \dots a_p$ máme definované operace vnějšího násobení $\wedge$ a vnější derivace d.
Na indexech z prost $T^k_l M$ jak tenzorové násobení a kov. der. ∇.
Dohromady definují kov. vnější derivaci $\overset{\nabla}{d}$

$$\overset{\nabla}{d}_{a_0} \omega_{a_1 \dots a_p}{}^{m\dots}{}_{n\dots}$$

Věta o vztahu vnější kov. der. a kov. der. jak dává návod jak vnější derivaci na $\Lambda^p M$ převést na kov. der. na $T^0_{[p]} M$

$$\underbrace{\overset{\nabla}{d}_{a_0} \omega_{a_1 \dots a_p}{}^{m\dots}{}_{n\dots}}_{\Lambda^p T^k_l M} = \nabla_{a_0} \wedge \underbrace{\omega_{a_1 \dots a_p}{}^{m\dots}{}_{n\dots}}_{T^k_{p+l} M} + T^k{}_{a_0 a_1} \wedge \omega_{|k| a_2 \dots a_p}{}^{m\dots}{}_{n\dots}$$

Při používání tohoto formalismu je potřeba dávat pozor, které indexy se chápou jako formové, z $\Lambda^p M$, a které jako tenzorové, z $T^k_l M$

Vzhledem k tomu, že se však jedná o tenzorové indexy stejného typu, existuje volnost, jak se indexy rozdělí. Toho lze využít s výhodou při některých úpravách.

Věta Torze kov. der ∇ na TM

chápejme jednotkový tenzor δ^m_a jako objekt z $\Lambda^1 T^1_0 M$ jak

$$\overset{\nabla}{d}_a \delta^m_b = T^m{}_{ab}$$

důkaz
přímé použití vztahu $\overset{\nabla}{d}$ a ∇ a faktu $\nabla\delta = 0$

$$\overset{\nabla}{d}_a \delta^m_b = \nabla_a \wedge \delta^m_b + T^n{}_{ab} \delta^m_n = 2 \nabla_{[a} \delta^m_{b]} + T^m{}_{ab} = T^m{}_{ab}$$

Pro tečný bundl $\mathbb{T}M$ je tenzor křivosti Riemannův tenz. R
Ten lze chápat jako $\mathbb{T}^1_1 M$-značnou 2-formu

$$R_{\underline{mn}}{}^{a}{}_{b} \in \Lambda^2 \mathbb{T}^1_1 M$$

Stejně tak Christoffelovy symboly charakt. rozdíl ∇ a souřadnicové der. $\nabla = \partial + \Gamma^a$ jsou $\mathbb{T}^1_1 M$ značné 1-formy

$$\Gamma_{\underline{m}}{}^{a}{}_{b} \in \Lambda^1 \mathbb{T}^1_1 M$$

V tomto smyslu můžeme použít vzorec pro tenz. kř. na vektorovém bundlu

Věta
mějme kov. der. ∇ a souř. der ∂ na tečném bundlu $\mathbb{T}M$

$$\nabla = \partial + \Gamma$$

Riemannův tenzor je dán

$$R_{\underline{mn}}{}^{a}{}_{b} = \partial d_{\underline{m}} \Gamma_{\underline{n}}{}^{a}{}_{b} + [\Gamma_{\underline{m}}, \Gamma_{\underline{n}}]^{a}{}_{b}$$

Rozepíšeme-li kov. vnější derivaci a komutátor, dostaneme standardní vzorec

$$R_{\underline{mn}}{}^{a}{}_{b} = \partial_{\underline{m}} \Gamma_{\underline{n}}{}^{a}{}_{b} - \partial_{\underline{n}} \Gamma_{\underline{m}}{}^{a}{}_{b} + \Gamma_{\underline{m}}{}^{a}{}_{k} \Gamma_{\underline{n}}{}^{k}{}_{b} - \Gamma_{\underline{n}}{}^{a}{}_{k} \Gamma_{\underline{m}}{}^{k}{}_{b}$$

Věta Bianchiho identity pro ∇
na $\mathbb{T}M$ lze Bianchiho identity pro ∇ zapsat

$$\overset{\nabla}{d}_a R_{bc}{}^{k}{}_{l} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\nabla_{[a} R_{bc]}{}^{k}{}_{l} = T_{[ab}{}^{n} R_{c]n}{}^{k}{}_{l}$$

pro beztorzní derivaci ∇ tak máme

$$\nabla_{[a} R_{bc]}{}^{k}{}_{l} = 0$$