GEOMETRIE LIEOVÝCH GRUP

* Lieova grupa je současně varieta a grupa
* obsah:
  - Lie. g. a levoinv. pole
  - Lie. algebra a exp. zobr.
  - adjoint reprezentace
  - metrika a kov. der.
  - akce g. na varietě, isometrie
  - reprezentace Lie. g. a alg. (na vekt. pr.)

LIEOVY GRUPY A LEVOINV. POLE

Def: G je Lie. g.

G je grupa a dif. varieta

grupové operace jsou hladké

$g, h \to gh$, $g \to g^{-1}$, $g \to e$ * mluvit o zobrazeních místo o prvcích se hodí pro zobecnění - supersymetrie

* hladkost: $C^0 \Rightarrow C^\omega$ (5. Hilbertův problém)

Def: levé a pravé násobení (posun)

$L_g : G \to G \qquad L_g h = gh$

$R_g : G \to G \qquad R_g h = hg$

adjoint/konjugované zobr.

$AD_g : G \to G \qquad AD_g h = g h g^{-1} \qquad AD_g = L_g R_{g^{-1}}$ * pozor: budou i jiné adjointy

Lemma: a) $L_g R_h = R_h L_g$ * komutace

b) $L_g H = H L_g \quad \forall g \in G \Rightarrow \exists h \in G \quad H = R_h$ * podobně pro R_g

důk:

a) triv.

b) $Hg = H L_g e = L_g \underbrace{He}_{=:h} = gh = R_h g$

Def: tenz. pole A na G je levoinv. * v tečném prostoru G indexy $\alpha, \beta, \ldots$, $A^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots}$

$L_{g*} A = A \quad \forall g \in G$ * L_g je difeo., tzn. můžu definovat push-fw. na všech tenz. polích

* podobně pravoinv. $R_{g*} A = A \quad \forall g \in G$

Def: levoinv. roznesení tenz. $A \in \mathbb{T}_e G$

$\ell[A]|_g = L_{g*} A$ * tenz. A roznesu z jednotky do celé grupy

notace $\ell_A = \ell[A]$ * podobně pravoinv. roznesení $r[A]|_g = R_{g*} A$, $r_A = r[A]$

Lemma: $\ell[A]$ je levoinv. pole * podobně pravoinv.

důk: $(L_{g*}\ell[A])|_h \overset{\text{* push-fw tenz. pole}}{=} L_{g*}(\ell[A]|_{g^{-1}h}) \overset{\text{* levoinv. roznesení}}{=} L_{g*}(L_{g^{-1}h\,*} A|_e) \overset{\text{* skládání push-fw.}}{=} L_{h*} A|_e \overset{\text{* levoinv. roznesení}}{=} \ell[A]|_h$

Lemma: levoinvariantnost komutuje s: $\otimes$ d $\wedge$ d $[,]$ nás. číslem $+$

* důk: z vlastností indukc. zobr. (např. $\Phi^* d = d\Phi^*$, $\phi_*[a,b] = [\phi_* a, \phi_* b]$)

* ukázali jsme že levoinv. rozn. je levoinv., ale platí i opak: levoinv. pole je dáno jednoznačně hodnotou v jednotce

Věta: A je levoinv. pole
$\Rightarrow$ A dáno hodnotou $A|_e$
$A = \ell[A|_e]$

důk: $A|_g = (L_{g*}A)|_g = L_{g*}(A|_{g^{-1}g}) = \ell[A|_e]|_g$, kde $g^{-1}g = e$
* levoinv. pole
* push-fw tenz. pole
* levoinv. rozn.

Lemma: levoinv. báze E_α, E^α (duální)
A je levoinv. $\Leftrightarrow$ $A^{\alpha\dots}_{\beta\dots}$ jsou konstanty
* tzn. levoinv. pole má konst. komp. vůči levoinv. bázi
* důk: pže levoinvarintnost komutuje se sčítáním a násobením číslem
* čísla se roznášejí konstantně pomocí ℓ
* pokud $\overset{L}{E}_\alpha|_e = \overset{R}{E}_\alpha|_e$ tak $A^{\alpha\dots}_{\beta\dots}$ stejné v obou bazích

* pozn: Haarova míra: levoinv. rozn. objem elementu z jednotky
často je bi-inv. (poloprostá, abelovská, souvislé nilpotentní)

Věta: pro $A \in \mathbb{T}^k_e{}_\ell G$ platí
i) $L_{g*}\ell[A] = \ell[A]$
ii) $R_{g*}\ell[A] = \ell[AD_{g^{-1}*}A]$
iii) $AD_{g*}\ell[A] = \ell[AD_{g*}A]$
iv) $r[A]|_g = \ell[AD_{g^{-1}*}A]|_g$

* obdobně (pozor: "$g^{-1} \to g$" v ii) a iv) kvůli def. AD)
$R_{g*}r[A] = r[A]$
$L_{g*}r[A] = r[AD_{g*}A]$
$AD_{g*}r[A] = r[AD_{g*}A]$
$\ell[A]|_g = r[AD_{g*}A]|_g$

* pozn: $AD_g e = geg^{-1} = e$
ale $AD_{g*}A \neq A$
(jiný tenzor v e)

důk: i) triv.
ii) $(R_{g*}\ell[A])|_h = R_{g*}(\ell[A]|_{hg^{-1}}) = R_{g*}(L_{hg^{-1}*}A) = L_{h*}(AD_{g^{-1}*}A) = \ell[AD_{g^{-1}*}A]|_h$
* push-fw tenz. pole
* levoinv. rozn.
* komutace L, R a definice AD
* levoinv. rozn.

iii) plyne z i) a ii) využitím $AD_{g*} = L_{g*}R_{g^{-1}*}$
iv) $r[A]|_g = R_{g*}A = R_{g*}(\ell[A]|_e) = (R_{g*}\ell[A])|_g = \ell[AD_{g^{-1}*}A]|_g$
* pravoinv. rozn.
* identita $A = \ell[A]|_e$
* push-fw tenz. pole
$(\phi_*(B|_x) = (\phi_* B)|_{\phi x})$
* ii)

Věta: levoinv. pole A je bi-inv.
$\Leftrightarrow$ $A|_e = AD_{g*}A|_e$

důk "$\Leftarrow$": $R_{g*}A = R_{g*}\ell[A|_e] = \ell[AD_{g^{-1}*}A|_e] = \ell[A|_e] = A$
* A je levoinv. pole
* ii)
* předpoklad
* A je levoinv.

důk "$\Rightarrow$": stejné úpravy
$\Rightarrow \ell[AD_{g^{-1}*}A|_e] = \ell[A|_e] \Rightarrow AD_{g^{-1}*}A|_e = A|_e$

LIEOVA ALGEBRA A EXP. ZOBR

Def: $\mathfrak{g}$ je Lie. alg. Lie. g. G

$$g = T_e G$$

* směry z jednotky = odpovídají prvkům G, které se málo liší od jednotky

$$[a,b] := [l_a, l_b]|_e$$

* závorka Lie. alg. je definována jako Lie. závorka levoinv. rozšíření a, b vyčíslená v jednotce (lze pže $[l_a, l_b]$ je levo inv. tzn. dané hodnotou v jednotce)

* antisym. a Jacobi id. levé strany je důsledkem stejných vlastností pravé

Lemma: g je isomorfní s Lie. alg. levoinv. vekt. polí

* levoinv. vekt. pole bychom mohli vzít přímo jako definici Lie. alg. Lie g G

důk: * pže levoinv. pole je určeno hodnotou v jednotce

$$a \leftrightarrow l_a \Rightarrow [l_a, l_b] = l_{[a,b]}$$

Def: strukturní tenzor

$$[a,b]^\gamma = a^\alpha b^\beta c_{\alpha\beta}{}^\gamma$$

* díky linearitě lze reprezentovat tenzorem

* rozneseme na G levoinvariantně

$$c = l[c]$$

* potom díky isomorfismu

$$[l_a, l_b]^\gamma = c_{\alpha\beta}{}^\gamma \, l_a^\alpha \, l_b^\beta$$

strukturní konstanty

komp. $c_{\alpha\beta}{}^\gamma$ vůči levoinv. bázi

* konstantní pže to jsou komp. levoinv. polí v levoinv. bázi

Def: Killingova metrika

$$k_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} c_{\alpha\mu}{}^\nu c_{\beta\nu}{}^\mu$$

Věta: $c_{\alpha\beta\gamma} = c_{[\alpha\beta\gamma]}$ kde $c_{\alpha\beta\gamma} = c_{\alpha\beta}{}^\mu k_{\mu\gamma}$

důk: později

* pozitivně def. pro kompaktní poloprostou (s touto konvencí)

* nedegen. pro poloprostou

Věta: $c_{\alpha\beta}{}^\gamma$ a $k_{\alpha\beta}$ jsou bi-inv.

Věta: $\overset{L}{c}_{\alpha\beta}{}^\gamma = \overset{R}{c}_{\alpha\beta}{}^\gamma = \text{konst}$

$\overset{L}{k}_{\alpha\beta} = \overset{R}{k}_{\alpha\beta} = \text{konst}$

* komponenty vůči $\overset{L}{E}_\alpha, \overset{R}{E}_\alpha$

$\overset{L}{E}_\alpha|_e = \overset{R}{E}_\alpha|_e$

důk: c levo inv. z definice

označme $Ad_g = AD_{g*}$ * adjoint G na g (bude později)

působí na g jako $Ad_g{}^\alpha{}_\beta$ * $Ad_g{}^\alpha{}_\beta$ je diferenciál AD_g, navíc $AD_g e = e$

$$Ad_g[a,b] \overset{\text{* def. } [a,b]}{=} Ad_g [l_a, l_b]|_e \overset{\text{* push-fw pole, } AD_g e = e}{=} (Ad_g [l_a, l_b])|_e \overset{\text{* indukk. zobr. komut. s Lie. z.}}{=} [Ad_g l_a, Ad_g l_b]|_e$$

$$\overset{\text{* z iii)}}{=} [l_{Ad_g a}, l_{Ad_g b}]|_e \overset{\text{* def } [a,b]}{=} [Ad_g a, Ad_g b]$$

* závorka je Ad-inv., tzn. c_e musí být taky

* v indexech (z def. c)

$$Ad_g{}^\varkappa{}_\gamma \, \cancel{a^\alpha} \cancel{b^\beta} c_{\alpha\beta}{}^\gamma|_e = Ad_g{}^\mu{}_\alpha \cancel{a^\alpha} Ad_g{}^\nu{}_\beta \cancel{b^\beta} c_{\mu\nu}{}^\varkappa|_e$$

$$\Rightarrow AD_{g*} c|_e = c|_e \Rightarrow c \text{ bi-inv} \Rightarrow k \text{ bi-inv.}$$

* kontrakcí s $Ad_{g^{-1}}{}^\lambda{}_\varkappa$ (k prvnímu $\Rightarrow$)

* z věty o bi-inv. (k druhému $\Rightarrow$)

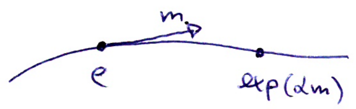
* Lie. alg. obsahuje veškerou lokální informaci o grupě (struktura Lie. alg. je zachycena právě v Lie. z., tzn. v e)
* Lie. alg. je vekt. prostor => lze zachytit pomocí tenzorů (tzn. nemusíme se zabývat komplikovaným násobením v grupě)
* Lie. alg. popisuje vlastnosti komponent Lie. g., které jsou spojeny s jednotkou; to plyne z existence exp. zobr. (např. zrcadlení zobrazuje na jinou komponentu)

Def: exponenciální zobr.

$\exp: \mathfrak{g} \to G$

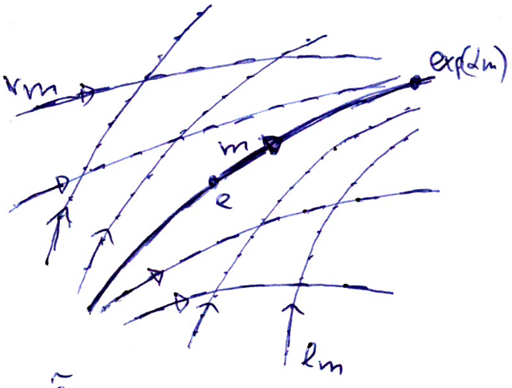
$\exp((\alpha+\beta)m) = \exp(\alpha m)\exp(\beta m)$ — * pozor: musí být ve stejném směru m

$\exp(0) = e \qquad \frac{D}{d\varepsilon}\exp(\varepsilon m)\Big|_{\varepsilon=0} = m$ — * křivka z jednotky vyráží ve směru m



* $\exp(\alpha m)$ tvoří 1-par. komut. podgrupu G
* $\exp(\alpha m) = $ "$(\exp m)^\alpha$" dává výsledek všech mocnin ("interpolace" $\alpha = 2, 3, \dots$)

Věta: $\exp(\alpha m)$ je int. křivka polí l_m a r_m procházející e



* obecné integrální křivky l_m a r_m jsou různé, ale ty co prochází jednotkou jsou stejné a odpovídají $\exp(\alpha m)$
* je třeba ukázat, že int. křivky l_m a r_m procházející jednotkou splňují vlastnosti exponenciálního zobr. a jsou to stejné křivky

důk: $\tilde{l}_m(\alpha)$ a $\tilde{r}_m(\alpha)$ jsou int. kř. procházející e, tzn. $\tilde{l}_m(0) = \tilde{r}_m(0) = e$

zřejmě $\frac{D\tilde{l}_m}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = l_m|_e = m$ (podobně pro $\tilde{r}_m(\alpha)$)

definujme $k(\alpha) = \tilde{r}_m(\alpha)\tilde{r}_m(\beta)$, $k(0) = \tilde{r}_m(\beta)$ je společný bod

$$\frac{Dk}{d\alpha}\Big|_{\alpha_0} \underset{\text{* def. R}}{=} \frac{D}{d\alpha}\left(R_{\tilde{r}_m(\beta)}\tilde{r}_m(\alpha)\right)\Big|_{\alpha_0} \underset{\text{* push-fw. vekt.}}{=} R_{\tilde{r}_m(\beta)*}\frac{D\tilde{r}_m}{d\alpha}\Big|_{\alpha_0} \underset{\text{* def. } \tilde{r}_m(\alpha)}{=} R_{\tilde{r}_m(\beta)*}\, r_m|_{\tilde{r}_m(\alpha_0)}$$

$$\underset{\text{* i)}}{=} r_m|_{\tilde{r}_m(\alpha_0)\tilde{r}_m(\beta)} = r_m|_{k(\alpha_0)} \Rightarrow k(\alpha) \text{ je int. křivka } r_m$$

z jednozn. řeš. dif. rovnic prvního řádu vyplývá, že $k(\alpha)$ se od $\tilde{r}_m(\alpha)$ může lišit jen o posun argumentu, $\tilde{r}_m(\alpha+\beta) = k(\alpha) = \tilde{r}_m(\alpha)\tilde{r}_m(\beta)$
(podobně $\tilde{l}_m(\alpha+\beta) = \tilde{l}_m(\alpha)\tilde{l}_m(\beta)$)

$$r_m|_{\tilde{l}_m(\alpha_0)} \underset{\text{* i)}}{=} R_{\tilde{l}_m(\alpha_0)*}\, r_m|_e \underset{\text{* } r_m|_e = m}{=} R_{\tilde{l}_m(\alpha_0)*}\, m \underset{\text{* } m = \frac{D\tilde{l}_m}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}}{=} R_{\tilde{l}_m(\alpha_0)*}\frac{D\tilde{l}_m}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \underset{\text{* push-fw vektoru}}{=} \frac{D}{d\varepsilon}\left(R_{\tilde{l}_m(\alpha_0)}\tilde{l}_m(\varepsilon)\right)\Big|_{\varepsilon=0}$$

$= \frac{D}{d\varepsilon}\left(\tilde{l}_m(\varepsilon)\hat{l}_m(\alpha_0)\right)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{D}{d\varepsilon}\left(\tilde{l}_m(\alpha_0+\varepsilon)\right)\Big|_{\varepsilon=0} = l_m\big|_{\hat{l}_m(\alpha_0)}$ (podobně na $\hat{r}_m(\alpha_0)$)

* def. R

* def. $\hat{l}_m(\alpha)$

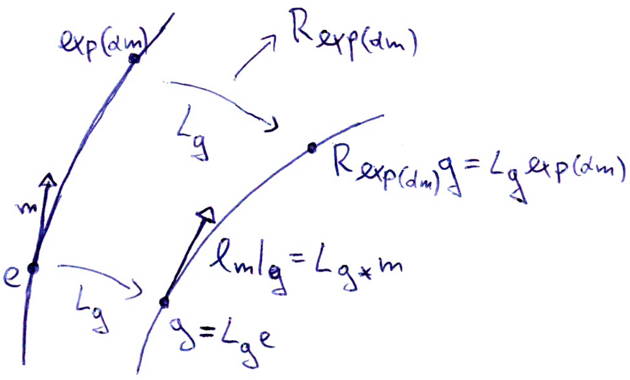
$\Rightarrow$ $\tilde{l}_m(\alpha)$ i $\tilde{r}_m(\alpha)$ jsou int. kř. l_m i r_m $\Rightarrow$ $\exp(\alpha m) = \hat{l}_m(\alpha) = \hat{r}_m(\alpha)$

* l_m a r_m shodné na $\hat{l}_m(\alpha_0)$ a $\hat{r}_m(\alpha_0)$

Věta: l_m je generátor toku $R_{\exp(\alpha m)}$

r_m je generátor toku $L_{\exp(\alpha m)}$

* generátory pravého násobení podgrupou $\exp(\alpha m)$ jsou levoinv. pole (podobně pro levé nás.)



* vynásobím-li g zprava $\exp(\alpha m)$, dostanu vynásobení $\exp(\alpha m)$ zleva g

* tzn. křivka procházející g se dostane z kř. procházející e vynásobením zleva g

* její tečný vektor v g je levoinv. přenos m do g

důk: * začnu def. generátorem

$$\frac{D}{d\varepsilon} R_{\exp(\varepsilon m)}\, g\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{D}{d\varepsilon} L_g \exp(\varepsilon m)\Big|_{\varepsilon=0} = L_{g*}\frac{D}{d\varepsilon}\exp(\varepsilon m)\Big|_{\varepsilon=0} = L_{g*}\, m = l_m|_g$$

* $L_h g = R_g h$ * push-fw. vekt. * def. exp. zobraz. * def. l_m

Lemma: $\mathcal{L}_{l_m} A = -\frac{d}{d\alpha} R_{\exp(\alpha m)*} A\Big|_{\alpha=0}$

$\mathcal{L}_{r_m} A = -\frac{d}{d\alpha} L_{\exp(\alpha m)*} A\Big|_{\alpha=0}$

* důk: z definice Lie. der (Lie. der. podél vekt. pole je dif. verze push-fw. tokem, jehož je vekt. pole generátorem)

Věta: A je levoinv. $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}_{r_m} A = 0$ $\forall m$ * podobně pravoinv.

* důk: důsledek předch. lemmatu

Věta: l_m a r_m jsou Kill. vekt. Kill. metriky k

důk: k je bi-inv $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}_{r_m} k = 0$ * levoinv.

$\mathcal{L}_{l_m} k = 0$ * pravoinv.

Věta: 1) $[l_a, l_b]^\mu = l_a^\alpha l_b^\beta c_{\alpha\beta}{}^\mu = l^\mu_{[a,b]}$

2) $[l_a, r_b]^\mu = 0$

3) $[r_a, r_b]^\mu = -r_a^\alpha r_b^\beta c_{\alpha\beta}{}^\mu = -r^\mu_{[a,b]}$

důk: 1) bylo

2) $[l_a, r_b] = \mathcal{L}_{l_a} r_b = -\frac{d}{d\alpha} R_{\exp(\alpha a)*}\, r_b\Big|_{\alpha=0} = -\frac{d}{d\alpha} r_b\Big|_{\alpha=0} = 0$

* vlastnost $\mathcal{L}$ * předchozí Lemma * i) * bi-inv. c

3) $r^\mu_{[a,b]}\big|_g = R_{g*}[a,b]^\mu = R_{g*}(a^\alpha b^\beta c_{\alpha\beta}{}^\mu) = r_a^\alpha r_b^\beta c_{\alpha\beta}{}^\mu$, zbytek později

* pravoinv. roznos * def. c * pravoinv. roznos, $r[c] = c$

Věta: * vztah mezi nás. v Lie. g a její Lie. alg.

$$[a,b] = \frac{D}{d\tau}\left[\exp(\sqrt{\tau}a)\exp(\sqrt{\tau}b)\exp(-\sqrt{\tau}a)\exp(-\sqrt{\tau}b)\right]\Big|_{\tau=0}$$

* odmocnina protože výraz v [...] netriv. až v 2. řádu

* závorka Lie. alg. vyjadřuje nekomutativitu násobení v grupě (pro komutativní vymizí)

Věta: G souvislá $\Rightarrow \forall g \in G: g = \exp(m_1) \dots \exp(m_n)$

ADJOINT REPREZENTACE

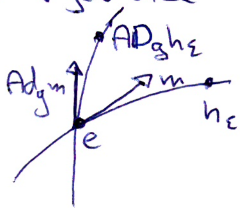
Def: $AD_g : G \to G \qquad AD_g h = g h g^{-1}$ * konjugace

Def: $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \qquad Ad_g = AD_{g*}$ * push-fw. AD_g působí jako $Ad_g{}^{\alpha}{}_{\beta}$ (diferenciál zobr. AD_g)

* protože AD_g zobrazuje jednotku na jednotku, tak Ad_g zobrazuje tečný prostor v jednotce na tečný prostor v jednotce

Lemma: $AD_g = L_g R_{g^{-1}} \qquad Ad_g = L_{g*} R_{g^{-1}*}$

$$Ad_g m = \frac{D}{d\varepsilon} AD_g h_\varepsilon\Big|_{\varepsilon=0} \qquad \frac{Dh_\varepsilon}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = m \qquad h_0 = e$$



* důk: vlastnosti push-fw.

Věta: AD_g je homomorfismus G | AD je akce na G * "nelin. repr." pže G není vekt. prostor

Ad_g je homomorfismus $\mathfrak{g}$ | Ad je reprezentace na $\mathfrak{g}$

* homom... je zobr. zachovávající strukturu (jsou to dokonce automorfismy, autom. je bijektivní homom. zobrazující do sebe)

důk:

$AD_g(h_1 h_2) = AD_g h_1 \, AD_g h_2$ * $g^{-1}g = e$

$AD_{g_1 g_2} = AD_{g_1} AD_{g_2} \qquad AD_{g^{-1}} = (AD_g)^{-1} \qquad AD_e = id$

* plyne z definice AD_g

$Ad_g [a,b] = [Ad_g a, Ad_g b]$ * viz důk. o bi-inv. c (pže $c|_e$ je Ad-inv.)

$Ad_{g_1 g_2} = Ad_{g_1} \cdot Ad_{g_2} \qquad Ad_{g^{-1}} = (Ad_g)^{-1} \qquad Ad_e = \delta$

* plyne z definice $Ad_g = AD_{g*}$

* kontrakce pže působí jako $Ad^{\alpha}{}_{\beta}$ (lin. algebraický operátor)

Věta: $\exp(Ad_g m) = AD_g \exp m$

důk: * ukážeme, že $AD_g \exp(\alpha m)$ splňuje definici exp. zobr.

$$AD_g \exp(\alpha m)\Big|_{\alpha=0} = AD_g e = e$$

$$\frac{D}{d\alpha} AD_g \exp(\alpha m)\Big|_{\alpha=0} = Ad_g \frac{D}{d\alpha}\exp(\alpha m)\Big|_{\alpha=0} = Ad_g m$$

* push-fw. a def. Ad_g

* tj. argument exp na levé straně rovnosti

$$AD_g \exp((\alpha+\beta)m) = AD_g(\exp(\alpha m)\exp(\beta m)) = (AD_g \exp(\alpha m))(AD_g \exp(\beta m))$$

* def. exp. zobr. * předch. věta

$\Rightarrow$ splňuje všechny vlastnosti exp. zobr.

Def: $\mathrm{ad}_m : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ $\quad \mathrm{ad}_m a = \frac{d}{d\varepsilon} \mathrm{Ad}_{g_\varepsilon} a \Big|_{\varepsilon=0}$ $\quad \frac{Dg_\varepsilon}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = m \quad g_0 = e$

* ad_m je generátor Ad_g (pro prvek blízký e)

např.: $g_\varepsilon = \exp(\varepsilon m)$

Věta: $\mathrm{ad}_a b = [a,b]$ $\quad$ * ad není nová operace, je dána záv. Lie.-alg.

* v indexech (pomocí c)

$$\mathrm{ad}_a{}^\kappa{}_\nu = a^\alpha c_{\alpha\nu}{}^\kappa$$

* strukturní tenzor definuje závorku

důkaz

$$[a,b] = [l_a, l_b]|_e = \mathcal{L}_{l_a} l_b|_e = \frac{d}{d\alpha} R_{\exp(-\alpha a)*}\, l_b\big|_{\alpha=0}\big|_e = \frac{d}{d\alpha} l[\mathrm{Ad}_{\exp(\alpha a)} b]\big|_{\alpha=0}\big|_e$$

* def. $[a,b]$ $\quad$ * vlastnost $\mathcal{L}$ $\quad$ * Lemma z L5 až na znaménko $\quad$ * ii)

$$= l\Big[\frac{d}{d\alpha}\mathrm{Ad}_{\exp(\alpha a)} b\big|_{\alpha=0}\Big]\Big|_e = l[\mathrm{ad}_a b]|_e = \mathrm{ad}_a b$$

* lin. $l[\dots]$ $\quad$ * def. ad $\quad$ * $l[a]|_e = a$

důk 3) z L5:

$$[r_a, r_b] = \mathcal{L}_{r_a} r_b = -\frac{d}{d\alpha} L_{\exp(\alpha a)*} r_b\big|_{\alpha=0} = -\frac{d}{d\alpha} r[\mathrm{Ad}_{\exp(\alpha a)} b]\big|_{\alpha=0} = -r[\mathrm{ad}_a b] = -r_{[a,b]}$$

* vlastnost $\mathcal{L}$ $\quad$ * Lemma z L5 $\quad$ * ii) $\quad$ * lin. $r[\dots]$, def. ad $\quad$ * předch. věta

Věta: ad je reprezentace $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{g}$

tj. $\mathrm{ad}_{[a,b]} = [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b] \equiv \mathrm{ad}_a \cdot \mathrm{ad}_b - \mathrm{ad}_b \cdot \mathrm{ad}_a$

* záv. Lie.alg. $\quad$ * komutátor tenzorů (operátorů)

důk:

$$\mathrm{ad}_{[a,b]} \cdot c - [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b]\cdot c = [[a,b],c] - [a,[b,c]] + [b,[a,c]] = 0$$

* předch. věta $\quad$ * Jakob. id.

Věta: $\mathrm{Ad}_{\exp a} = \exp(\mathrm{ad}_a)$

* pravá strana je "maticová" exp. tenzorů $\mathfrak{g}^1_1$ (operátorů)

* je buď definována rozvojem nebo vlastnostmi

důk: * ukážeme, že $\mathrm{Ad}_{\exp(\alpha a)}$ splňuje vlastnosti "maticové" exp $\longrightarrow$

$$\begin{cases} \exp M = \delta + M + \frac{1}{2!}M^2 + \dots \\ \exp(0) = \delta \quad \frac{d}{d\alpha}\exp(\alpha M) = M\cdot\exp(\alpha M) \quad \exp((\alpha+\beta)M) = \exp(\alpha M)\cdot\exp(\beta M) \end{cases}$$

$$\mathrm{Ad}_{\exp(\alpha m)}\big|_{\alpha=0} = \delta$$

$$\mathrm{Ad}_{\exp((\alpha+\beta)m)} = \mathrm{Ad}_{\exp(\alpha m)\exp(\beta m)} = \mathrm{Ad}_{\exp(\alpha m)} \cdot \mathrm{Ad}_{\exp(\beta m)}$$

* def. exp. zobr. $\quad$ * Ad je repr.

$$\frac{d}{d\alpha}\mathrm{Ad}_{\exp(\alpha a)}\big|_{\alpha=\alpha_0} = \frac{d}{d\varepsilon}\mathrm{Ad}_{\exp((\alpha_0+\varepsilon)a)}\big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\mathrm{Ad}_{\exp(\varepsilon a)}\big|_{\varepsilon=0} \cdot \mathrm{Ad}_{\exp(\alpha_0 a)} = \mathrm{ad}_a \cdot \mathrm{Ad}_{\exp(\alpha_0 a)}$$

* $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon$ $\quad$ * předch. vztah $\quad$ * def ad_a

POLOPROSTÉ GRUPY A ALGEBRY

* pro aplikace v kalibrační teorii budeme potřebovat buď poloprosté nebo komut. gr. tzn. buď poloprosté nebo abel. alg.

Def: G je prostá
- nekomutující
- nemá vlastní invar. podgrupu

$AD_G S = S \Rightarrow (S = G$ or $S = \{e\})$

* $\forall g \in G, \forall s \in S: AD_g s \in S$

G je poloprostá

$G = \bigotimes_k G_k$ $\quad G_k$ prosté

* direktní součin = po komponentách $(g_1, g_2)(h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)$

Def: $\mathfrak{g}$ je prostá
- neábelovská * zav. je nenulová
- nemá vlastní ideál

$[I, \mathfrak{g}] = I \Rightarrow (I = \mathfrak{g}$ or $I = \{0\})$

$\mathfrak{g}$ je poloprostá

$\mathfrak{g} = \bigoplus_k \mathfrak{g}_k$ $\quad \mathfrak{g}_k$ prosté

* zase po komp. $[(a_1, a_2), (b_1, b_2)] = ([a_1, b_1], [a_2, b_2])$

Věta: $\mathfrak{g}$ je Lie. alg. Lie. g. G

* opět vidíme, že vlastnosti grupy jsou zachyceny vlastnostmi algebry

G je prostá $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ je prostá

G je poloprostá $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ je poloprostá

Věta: $\mathfrak{g}$ je prostá $\Rightarrow$ ad je ireducibilní * nemá vlastní netriv. podrepr.

$\mathfrak{g}$ je poloprostá $\Rightarrow$ ad je věrná * různé prvky repr. různě

$\Rightarrow k$ je nedegenerovaná * budeme potřebovat v kalib. teorii

Věta: G je poloprostá a kompaktní $\Rightarrow$ k je positivně definitní

* topologická vlastnost g. se překládá na algebraickou vlastnost tenzoru
* poloprosté $\mathfrak{g}$ se občas říká "kompaktní" když je k pos. def. ($\mathfrak{g}$ je vekt. prostor takže v normálním smyslu není kompaktní)

Def: $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ * prostor algebraických derivací na $\mathfrak{g}$ (tj. operátory splňující algebraický Leibniz)

$\delta \in \mathrm{Der}\,\mathfrak{g}$ $\quad \delta[a, b] = [\delta a, b] + [a, \delta b]$

$\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ * prostor všech ad_m

$M \in \mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ $\quad \exists m \in \mathfrak{g}: M = \mathrm{ad}_m$

Věta: $\mathfrak{g}$ je poloprostá $\Rightarrow$ $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g} = \mathrm{ad}_\mathfrak{g}$

* $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g} \supset \mathrm{ad}_\mathfrak{g}$ platí vždy díky Jacobiho id.

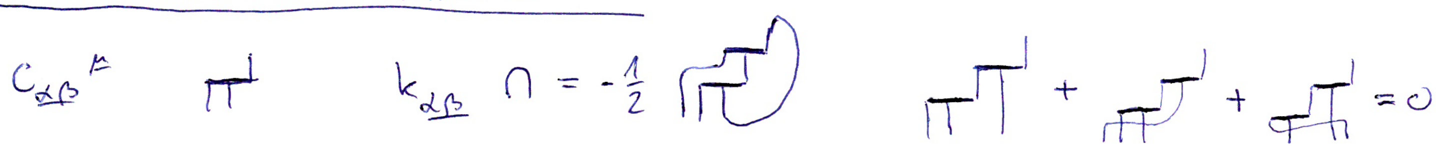
* umožní nám indukovat kov. der z Lie. alg. na asociované bundly

Věta: G je poloprostá, ε je Levi-Civ. tenzor k $\Rightarrow$ ε je bi-inv., $k^{\frac{1}{2}} = |\varepsilon|$ je bi-inv

* objem. element.

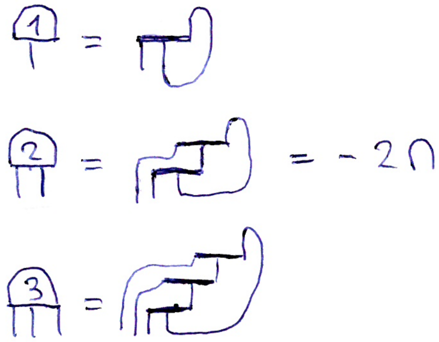
důk: jsou fce k, které je bi-inv.

STRUKT. TENZ. - VLASTNOSTI



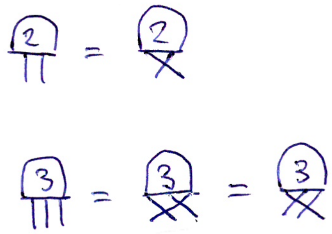
* Jacobi id. (cykl. kombinace)

Def: stopové formy



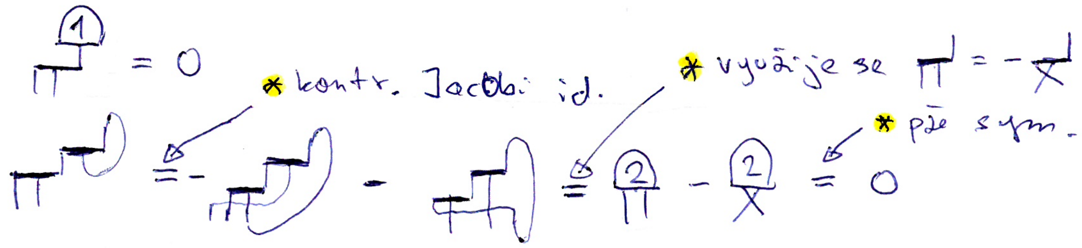
* symetrie

* cykličnost



Věta:

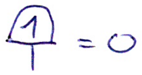
důk:

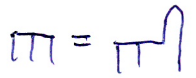


* kontr. Jacobi id.

* využije se

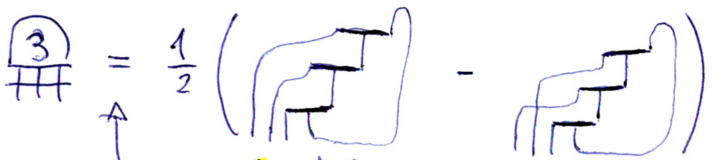
* pře sym.

* pro poloprostou je  nedeg. a lze odebrat => 

Def:  * C s dolními indexy

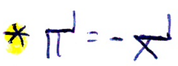
Věta: 

důk:

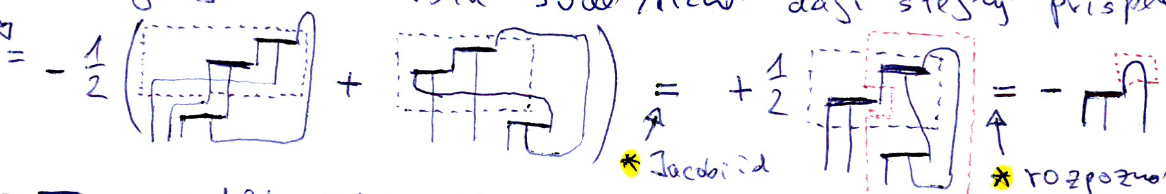


* sudé

* liché

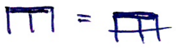


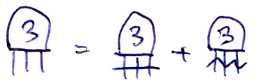
* v antisymetrizaci je 6 členů: 3 sudé a 3 liché perm. díky cykličnosti však sudé/liché dají stejný příspěvek



* Jacobi id

* rozpoznám

Věta:  * důsl. předch. věty

Věta: 

důk:

* cyklicnost