KOVARIANTNÍ DERIVACE

Def: levá a pravá kov. der.

$\overset{L}{\nabla}$ kov. der. anihilující levoinv. pole

$\overset{R}{\nabla}$ kov. der. anihilující pravoinv. pole

* to vypadá jako silný požadavek – existují vůbec?

Věta: $\overset{L}{\nabla}, \overset{R}{\nabla}$ existují a jsou dány jednoznačně

torze $\overset{L}{T}_{\mu\nu}{}^{\alpha} = -c_{\mu\nu}{}^{\alpha}$ $\qquad \overset{R}{T}_{\mu\nu}{}^{\alpha} = c_{\mu\nu}{}^{\alpha}$

křivost $\overset{L}{R}_{\mu\nu}{}^{\alpha}{}_{\beta} = 0$ $\qquad \overset{R}{R}_{\mu\nu}{}^{\alpha}{}_{\beta} = 0$

$\overset{R}{\nabla} - \overset{L}{\nabla} = c$ generováno $c_{\mu\nu}{}^{\alpha}$

důk: existence a jednozn.: $\overset{L}{\nabla} \overset{L}{E}_\alpha = 0 \Rightarrow \overset{L}{\nabla} A = 0 \ \forall A$ levoinv.

* zvolím levoinv. bázi $\overset{L}{E}_\alpha$, její n-ádová der. $\overset{L}{\nabla} E_\alpha = 0$ už anihiluje všechny levoinv. tenzory, pže jejich komp. v této bázi jsou konst. (různé levoinv. báze souvisejí konst. maticí přechodu ⇒ stejná $\overset{L}{\nabla}$)

$$\overset{L}{T}_{\alpha\beta}{}^{\varkappa} = \underbrace{\overset{L}{\nabla}_{\overset{L}{E}_\alpha} \overset{L}{E}_\beta^{\varkappa}}_{=0} - \underbrace{\overset{L}{\nabla}_{\overset{L}{E}_\beta} \overset{L}{E}_\alpha^{\varkappa}}_{=0} - [\overset{L}{E}_\alpha, \overset{L}{E}_\beta]^{\varkappa} = -c_{\alpha\beta}{}^{\varkappa} \Rightarrow \overset{L}{T}_{\alpha\beta}{}^{\varkappa} = -c_{\alpha\beta}{}^{\varkappa}$$

* def. torze komp. v levoinv. $\qquad$ * def. c

$$\overset{L}{R}_{\alpha\beta}{}^{\mu}{}_{\nu} = \overset{L}{\nabla}_\alpha \underbrace{\overset{L}{\nabla}_\beta \overset{L}{E}^{\mu}_{\nu}}_{=0} - \overset{L}{\nabla}_\beta \underbrace{\overset{L}{\nabla}_\alpha \overset{L}{E}^{\mu}_{\nu}}_{=0} + \overset{L}{T}_{\alpha\beta}{}^{\delta} \underbrace{\overset{L}{\nabla}_\delta \overset{L}{E}^{\mu}_{\nu}}_{=0} = 0 \Rightarrow \overset{L}{R}_{\alpha\beta}{}^{\mu}{}_{\nu} = 0$$

* taky zřejmé z n-ádovosti $\overset{L}{\nabla}$

* podobně $\overset{R}{R}_{\alpha\beta}{}^{\mu}{}_{\nu} = 0$

$$[\overset{R}{E}_\alpha, \overset{R}{E}_\beta]^{\varkappa} = -c_{\alpha\beta}{}^{\varkappa} \Rightarrow \overset{R}{T}_{\alpha\beta}{}^{\varkappa} = c_{\alpha\beta}{}^{\varkappa} \Rightarrow \overset{R}{T}_{\alpha\beta}{}^{\varkappa} = c_{\alpha\beta}{}^{\varkappa}$$

* 3) z 5 komp. v pravoinv.

* spočteme:

$$\overset{L}{\nabla}_{l_m} r_n = \overset{L}{\nabla}_{l_m} r_n - \underbrace{\overset{L}{\nabla}_{r_n} l_m}_{=0} - \underbrace{[l_m, r_n]}_{=0} = l_m \cdot \overset{L}{T} \cdot r_n = -l_m \cdot c \cdot r_n \Rightarrow \overset{L}{\nabla} r_n = -c \cdot r_n$$

* přidám 0 $\qquad$ * $\overset{L}{\nabla}$ anihil. levoinv. $\qquad$ * 2) z 5 $\qquad$ * def. torze $\qquad$ * $\overset{L}{T} = -c$ $\qquad$ * utrhnu l_m (výraz ultralok., z levoinv. lze vyrobit bázi)

označme $\overset{R}{\nabla} - \overset{L}{\nabla} = A$

$$0 = \overset{R}{\nabla}_\mu r_n^{\nu} = \overset{L}{\nabla}_\mu r_n^{\nu} + A_{\mu\varkappa}{}^{\nu} r_n^{\varkappa} = (A_{\mu\varkappa}{}^{\nu} - c_{\mu\varkappa}{}^{\nu}) r_n^{\varkappa} \Rightarrow A_{\mu\varkappa}{}^{\nu} = c_{\mu\varkappa}{}^{\nu}$$

* $\overset{R}{\nabla}$ anihil. pravoinv. $\qquad$ * pomocí A $\qquad$ * právě odvozený vztah $\qquad$ * utrhnu r_n

Věta: Maurer-Cartanovy rovnice

$$d\overset{L}{E}{}^{\alpha} + \frac{1}{2} c_{\varkappa\lambda}{}^{\alpha}\, \overset{L}{E}{}^{\varkappa} \wedge \overset{L}{E}{}^{\lambda} = 0$$

$$d\overset{R}{E}{}^{\alpha} - \frac{1}{2} c_{\varkappa\lambda}{}^{\alpha}\, \overset{R}{E}{}^{\varkappa} \wedge \overset{R}{E}{}^{\lambda} = 0$$

* hodí se na hledání levo/pravoinv. báze ze znalosti strukturních konstant (vyjádřením E^{α} v souř. → dif. rovnice)
* $c_{\varkappa\lambda}{}^{\alpha}$ vyjádřeno v $\overset{L}{E}{}^{\alpha}$ v první a v $\overset{R}{E}{}^{\alpha}$ v druhé, stejné když $\overset{L}{E}{}^{\alpha}|_e = \overset{R}{E}{}^{\alpha}|_e$
* motivuje definici vnější der. na g

důk:

$$d_{\mu} \overset{L}{E}{}^{\alpha}_{\nu} = \underbrace{\overset{L}{\nabla}_{\mu} \wedge \overset{L}{E}{}^{\alpha}_{\nu}}_{=0} + \overset{L}{T}{}_{\mu\nu}{}^{\beta} E^{\alpha}_{\beta} = -c_{\mu\nu}{}^{\beta} \overset{L}{E}{}^{\alpha}_{\beta} = -c_{\varkappa\lambda}{}^{\alpha} \overset{L}{E}{}^{\varkappa}_{\mu} \overset{L}{E}{}^{\lambda}_{\nu} = -\frac{1}{2} c_{\varkappa\lambda}{}^{\alpha} \overset{L}{E}{}^{\varkappa} \wedge \overset{L}{E}{}^{\lambda}$$

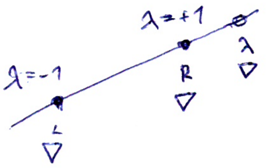
* vztah vnější a kov. der. s torzí
* předch. věta
* pomocí strukt. konst.
* antisym. v $\varkappa, \lambda$, pomocí $\wedge$

* pro $\overset{R}{E}{}^{\alpha}$ stejné až na $\overset{R}{T}{}_{\mu\nu}{}^{\beta} = +c_{\mu\nu}{}^{\beta}$

* na poloprostém G máme metriku k, chceme najít Levi-Civitovu ∇
* $\overset{L}{\nabla}$ a $\overset{R}{\nabla}$ jsou metrické ale mají nenulovou torzi
  → zkusíme udělat jejich průměr

Def:

$$\overset{\lambda}{\nabla} = \frac{1-\lambda}{2} \overset{L}{\nabla} + \frac{1+\lambda}{2} \overset{R}{\nabla} = \overset{L}{\nabla} + \frac{\lambda+1}{2} c = \overset{R}{\nabla} + \frac{\lambda-1}{2} c$$



* kov. der. nelze obecně sčítat pže prostor kov. der není vektorový, ale afinní
* v afinním prostoru můžeme definovat přímku, která prochází dvěma body, což je přesně $\overset{\lambda}{\nabla}$ (díky $\frac{1-\lambda}{2} + \frac{1+\lambda}{2} = 1$)
* $\overset{\lambda}{\nabla}$ lze také vyjádřit jako bod na přímce a vektor (to je konzistentní pže $c = \overset{R}{\nabla} - \overset{L}{\nabla}$)

Lemma:

$$\overset{\lambda}{\nabla}_{\mu} l_m^{\varkappa} = \frac{\lambda+1}{2} c_{\mu\nu}{}^{\varkappa} l_m^{\nu} \qquad \overset{\lambda}{\nabla}_{\mu} r_m^{\varkappa} = \frac{\lambda-1}{2} c_{\mu\nu}{}^{\varkappa} r_m^{\nu}$$

$$\overset{\lambda}{\nabla}_{l_m} l_n = \frac{1+\lambda}{2} l_{[m,n]} \qquad \overset{\lambda}{\nabla}_{r_m} r_n = \frac{1-\lambda}{2} r_{[m,n]}$$

důk: využitím $\overset{L}{\nabla} l_n = 0$ $\overset{R}{\nabla} r_m = 0$

$$l_m \cdot c \cdot l_n = [l_m, l_n] = l_{[m,n]} \qquad r_m \cdot c \cdot r_n = -[r_m, r_n] = -r_{[m,n]}$$

* 1) z L5
* 3) z L5

Věta: $\overset{\lambda}{\nabla} c = 0$ $\overset{\lambda}{\nabla} k = 0$

důk: pže $\overset{L}{\nabla} c = 0$ $\overset{R}{\nabla} c = 0$ (c je bi-inv.), $\overset{\lambda}{\nabla}$ je kombinace $\overset{L}{\nabla}$ a $\overset{R}{\nabla}$

alternativně: $c_{\alpha} c_{\beta\gamma}{}^{\varkappa} = c_{\alpha\lambda}{}^{\varkappa} c_{\beta\gamma}{}^{\lambda} - c_{\alpha\beta}{}^{\lambda} c_{\lambda\gamma}{}^{\varkappa} - c_{\alpha\gamma}{}^{\lambda} c_{\beta\lambda}{}^{\varkappa} = 0$ * Jacobi id. $\Rightarrow \overset{\lambda}{\nabla} c = \underbrace{\overset{L}{\nabla} c}_{=0} + \frac{\lambda+1}{2} \underbrace{c\, c}_{=0} = 0$

Věta:

$$\overset{\lambda}{T}{}_{\mu\nu}{}^{\varkappa} = \lambda c_{\mu\nu}{}^{\varkappa} \qquad \overset{\lambda}{R}{}_{\mu\nu}{}^{\varkappa}{}_{\lambda} = -\frac{1-\lambda^2}{4} c_{\mu\nu}{}^{\alpha} c_{\alpha\lambda}{}^{\varkappa} \qquad \overset{\lambda}{Ric}_{\alpha\beta} = \frac{1-\lambda^2}{2} k_{\alpha\beta} \qquad \overset{\lambda}{\mathcal{R}} = \frac{1-\lambda^2}{2} D$$

* "Einsteinův pr." (úměrný metrice)
* potřeba poloprostá na kontrakci s k^{-1}

důk:

$$\overset{\lambda}{T}_{\mu\nu}{}^{\varkappa} = \overset{L}{T}_{\mu\nu}{}^{\varkappa} + 2\,\frac{\lambda+1}{2}\, c_{[\mu\nu]}{}^{\varkappa} = \lambda\, c_{\mu\nu}{}^{\varkappa}$$

* rozdíl torzí dvou kov. der.

* $\overset{L}{T}$ z ⌊10 antisym. zbytečná

$$\overset{\lambda}{R}_{\mu\nu}{}^{\varkappa}{}_{\lambda} = \underbrace{\overset{L}{R}_{\mu\nu}{}^{\varkappa}{}_{\lambda}}_{=0} + \underbrace{\overset{L}{\nabla}_{\mu} A_{\nu\lambda}^{\varkappa}}_{=0} - \underbrace{\overset{L}{\nabla}_{\nu} A_{\mu\lambda}^{\varkappa}}_{=0} + \overset{L}{T}_{\mu\nu}{}^{\alpha} A_{\alpha\lambda}^{\varkappa} + A_{\mu\alpha}^{\varkappa} A_{\nu\lambda}^{\alpha} - A_{\nu\alpha}^{\varkappa} A_{\mu\lambda}^{\alpha}$$

* rozdíl křivostí $A := \frac{\lambda+1}{2} c$

* z ⌊10

* přes $\overset{L}{\nabla} c = 0$ z věty výše

* Jacobi id. na členy v (...)

$$= -\frac{\lambda+1}{2} c_{\mu\nu}{}^{\alpha} c_{\alpha\lambda}{}^{\varkappa} + \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^2 \left(c_{\mu\alpha}{}^{\varkappa} c_{\nu\lambda}{}^{\alpha} - c_{\nu\alpha}{}^{\varkappa} c_{\mu\lambda}{}^{\alpha}\right) = -\frac{1-\lambda^2}{4} c_{\mu\nu}{}^{\alpha} c_{\alpha\lambda}{}^{\varkappa}$$

* dosazení za $\overset{L}{T}$ a A

* alternativně:

* lemma z ⌊11

$$l_m \cdot \overset{\lambda}{T} \cdot r_n = l_m \cdot \overset{\lambda}{\nabla} r_n - r_n \cdot \overset{\lambda}{\nabla} l_m - \underbrace{[l_m, r_n]}_{=0} = \frac{\lambda-1}{2} l_m \cdot c \cdot r_n - \frac{\lambda+1}{2} r_n \cdot c \cdot l_m = \lambda\, l_m \cdot c \cdot r_n$$

* def. torze

* 2) z ⌊5

$\overset{\lambda}{T} = \lambda c$ $\Leftarrow$ * odtržení l_m a r_n

* def. křivosti

$$\overset{\lambda}{R}(l_a, l_b) \cdot l_c = \overset{\lambda}{\nabla}_{l_a} \overset{\lambda}{\nabla}_{l_b} l_c - \overset{\lambda}{\nabla}_{l_b} \overset{\lambda}{\nabla}_{l_a} l_c - \overset{\lambda}{\nabla}_{[l_a, l_b]} l_c$$

$$= \frac{\lambda+1}{2} \left(\overset{\lambda}{\nabla}_{l_a} l_{[b,c]} - \overset{\lambda}{\nabla}_{l_b} l_{[a,c]} - \overset{\lambda}{\nabla}_{l_{[a,b]}} l_c \right) - \frac{1-\lambda}{2} \overset{\lambda}{\nabla}_{l_{[a,b]}} l_c$$

* první dva členy z Lemma z ⌊11, přičtu a odečtu $\frac{\lambda+1}{2} \overset{\lambda}{\nabla}_{l_{[a,b]}} l_c$

$$= \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^2 l_{\underbrace{[[a,[b,c]] - [b,[a,c]] - [[a,b],c]]}_{=0}} - \frac{1-\lambda^2}{4} l_{[[a,b],c]}$$

* znovu Lemma z ⌊11 * Jacobi id.

$$= -\frac{1-\lambda^2}{4} [[l_a, l_b], l_c] \Rightarrow \overset{\lambda}{R}_{\mu\nu}{}^{\varkappa}{}_{\lambda}\, l_a^{\mu} l_b^{\nu} l_c^{\lambda} = -\frac{1-\lambda^2}{4} l_a^{\mu} l_b^{\nu} c_{\mu\nu}{}^{\alpha} l_c^{\lambda} c_{\alpha\lambda}{}^{\varkappa}$$

* def. c, v indexech

$\Downarrow$ * odtržení l_a, l_b, l_c

$$\overset{\lambda}{R}_{\mu\nu}{}^{\varkappa}{}_{\lambda} = -\frac{1-\lambda^2}{4} c_{\mu\nu}{}^{\alpha} c_{\alpha\lambda}{}^{\varkappa}$$

Věta: $\nabla \equiv \overset{0}{\nabla}$ je Levi-Civ. kov. der. k

důk: $\overset{\lambda}{\nabla} k = 0 \Rightarrow \nabla k = 0$, $T = \overset{0}{T} = 0$ z předch. věty

pozn: $R = -\frac{1}{4} c \cdot c$ $\quad Ric = \frac{1}{2} k$ $\quad \mathcal{R} = \frac{p}{2}$ * pro poloprostou

Věta: orbity l_m, orbity r_m, $\exp(\alpha m)$ } jsou geodetiky $\overset{\lambda}{\nabla}$ (speciálně ∇)

důk: $\overset{\lambda}{\nabla}_{l_m} l_m = \frac{1+\lambda}{2} l_{[m,m]} = 0$

* lemma z ⌊11 * $[m,m] = 0$

$\overset{\lambda}{\nabla}_{r_m} r_m = \frac{1-\lambda}{2} r_{[m,m]} = 0$

$\exp(\alpha m)$ je orbita l_m a r_m procházející e * věta z ⌊4

Věta: $\mathcal{K}$ je levoinv./pravoinv. 1-forma $\Rightarrow$ $\mathcal{K}$ je Killing-Yano forma vůči k

důk: $\nabla_\mu \mathcal{K}_\nu = \underbrace{\overset{L}{\nabla}_\mu \mathcal{K}_\nu}_{=0} - \frac{1}{2} c_{\mu\nu}{}^{\alpha} \mathcal{K}_\alpha$ (podobně pravoinv.) $\quad \nabla_\mu \mathcal{K}_\nu = \nabla_{[\mu} \mathcal{K}_{\nu]}$

antisym.

* to implikuje $\mathcal{K}^\alpha$ je Kill. vekt. (už víme pže je levoinv./pravoinv.)

* levoinvariantnost se překládá na geodetiky a symetrie metriky k

Věta: $\overset{\lambda}{\nabla}_{l_m} = \mathcal{L}_{l_m} + \frac{\lambda-1}{2} \mathrm{ad}_{l_m} \qquad \overset{R}{\nabla}_{l_m} = \mathcal{L}_{l_m} \qquad \mathrm{ad}_{l_m}$ gen. $l_m \cdot c = l[\mathrm{ad}_m]$

$\overset{\lambda}{\nabla}_{r_m} = \mathcal{L}_{r_m} + \frac{\lambda+1}{2} \mathrm{ad}_{r_m} \qquad \overset{L}{\nabla}_{r_m} = \mathcal{L}_{r_m} \qquad \mathrm{ad}_{r_m}$ gen. $r_m \cdot c = r[\mathrm{ad}_m]$

* $\mathrm{ad}_m = m \cdot c$

důk: * vztah Lie. a kov. der. * Lemma z 11, $\overset{\lambda}{T}$ z 11 * antisym. c

$$\mathcal{L}_{l_m} = \overset{\lambda}{\nabla}_{l_m} + L_{l_m} \quad \text{gen. } L_{l_m} = -\overset{\lambda}{\nabla} l_m - l_m \cdot \overset{\lambda}{T} = -\frac{\lambda+1}{2} c \cdot l_m - \lambda\, l_m \cdot c = -\frac{\lambda-1}{2} l_m \cdot c$$

* podobně pro $\mathcal{L}_{r_m}$

* shrnutí: identifikovali jsme výjimečné kov. der. na G (napočítali torze, křivosti a ukázali souvislost s geod. a symetriemi k)

AKCE LIE. G. NA VARIETĚ

* idea: Lie. g. popisují prostor transformací na jiném prostoru (např. isometrie) (transf. se skládají, což dává grupovou strukturu)
  transformace z Lie. g. budou působit "akcí" na jiné variety

Def: A je akce G na M

$\forall g \in G \quad A_g : M \to M$ difeo.

* skládání operací bude odpovídat násobení v G

levá: $A_{g_1 g_2} = A_{g_1} A_{g_2}$

pravá: $A_{g_1 g_2} = A_{g_2} A_{g_1}$

notace: $A_g x = gx$, $A_g x = xg$

Př: $M=G$: $L_g \quad R_{g^{-1}} \quad AD_g$ levé akce G na G

$R_g \quad L_{g^{-1}} \quad AD_{g^{-1}}$ pravé akce G na G

Def: generátor akce A_g * $\mathfrak{g}$ je Lie. alg. Lie. g. G

$\forall m \in \mathfrak{g} \quad a_m \in TM$ * a_m je vekt. pole

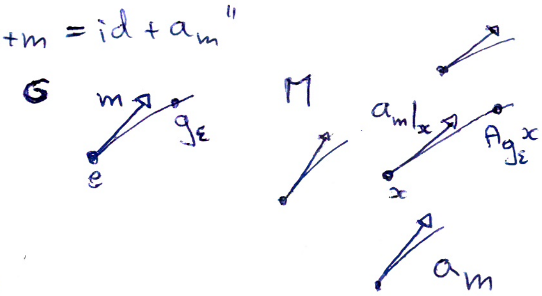
$\forall x \in M \quad a_\omega|_x = (A_\omega x)_*|_e$ * je push-fw. akce na x v argumentu g vyhodnocený v e

pozn: $A_\omega x : G \to M$ * tzn. kam mi různé $g \in G$ přesune daný bod $x \in M$

$a_\omega|_x : \mathfrak{g} \to T_x M$ * pro směr $m \in \mathfrak{g}$ z bodu e charakterizuje malou akci "$A_{e+m} = id + a_m$"

* z def. push-fw. dostáváme vzorec

$$a_m|_x = \frac{D}{d\varepsilon} A_{g_\varepsilon} x \Big|_{\varepsilon=0} \quad \text{kde} \quad \frac{D g_\varepsilon}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = m, \quad g_0 = e$$



* a_m je lineární v m (plyne z linearity push-fw.)

Věta: a_m je generátorem toku   * pozor na význam slova "generátor"

$$m_\alpha = A_{\exp(\alpha m)}$$

* pro takto zkonstruovanou 1-par. třídu diff na M lze ukázat že to je tok (1-par. grupa) a jeho generátor je generátor akce (obecná křivka g_α by nesplnila skládání)

důsledky:

* det. $\mathcal{L}$,

$$\frac{d}{d\alpha} m_{\alpha *} T \Big|_{\alpha=0} = -\mathcal{L}_{a_m} T$$

$$m_{\alpha *} = \exp[-\mathcal{L}_{a_m}]$$

* vlastnost $\mathcal{L}$ (řešení dif. rovnice v řeči operátorů)

důk: * je tok a gen. a_m

* exp. zobr.   * def. (levé) akce (pravá podobně)

$$m_{\alpha+\beta} = A_{\exp((\alpha+\beta)m)} = A_{\exp(\alpha m)\exp(\beta m)} = A_{\exp(\alpha m)} A_{\exp(\beta m)} = m_\alpha m_\beta \Rightarrow m_\alpha \text{ je tok}$$

$$\frac{D}{d\alpha} m_\alpha x \Big|_{\alpha=0} = \frac{D}{d\alpha} A_{\exp(\alpha m)} x \Big|_{\alpha=0} = a_m|_x \Rightarrow a_m \text{ je gen. toku } m_\alpha$$

* přímo def. gen. akce s využitím $\frac{D}{d\alpha}\exp(\alpha m)\big|_{\alpha=0} = m$

Lemma: A_g levá akce $A_{g*} a_m = a_{Ad_g m}$

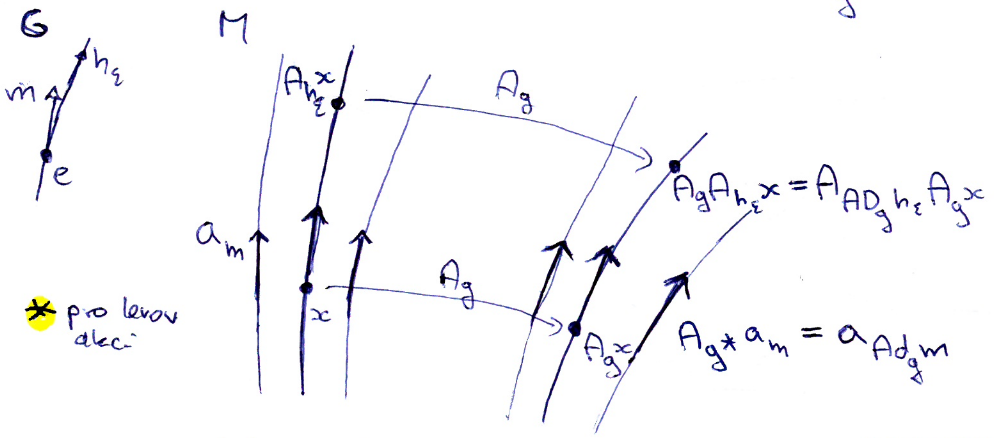
A_g pravá akce $A_{g^{-1}*} a_m = a_{Ad_g m}$

* působení akce na její generátor (skrze push-fw.)

* ve skutečnosti jsme už diskutovali pro konkrétní akce na G, teď pro obecnou akci na obecné varietě M

* v bodě x působíme $A_{h_\varepsilon} x$ která nám dá gen. a_m kolem x

* teď zapůsobíme A_g a zajímá nás gen. $A_{g*} a_m$



* pro levou akci

důk:

* def. gen. akce   * def. push-fw.

$$A_{g*}(a_m|_x) = A_{g*} \frac{D}{d\varepsilon} A_{h_\varepsilon} x \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{D}{d\varepsilon} A_g A_{h_\varepsilon} x \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{D}{d\varepsilon} A_{AD_g h_\varepsilon} A_g x \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= a_{\frac{D}{d\varepsilon} AD_g h_\varepsilon |_{\varepsilon=0}} \Big|_{A_g x} = a_{Ad_g m}\Big|_{A_g x}$$

* def. gen. akce

* tečný vektor k $AD_g h_\varepsilon$ (křivka v G) je $Ad_g m$, kde $m = \frac{D h_\varepsilon}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0}$

* push-fw. pole

$$\Rightarrow A_{g*} a_m = a_{Ad_g m}$$

* podobně pro pravou

* křivka $A_{h_\varepsilon} x$ se působením přesune na novou křivku

$$A_g A_{h_\varepsilon} x = A_g A_{h_\varepsilon} A_{g^{-1}} A_g x$$

$A_{g^{-1}} A_g = id$

$$= A_{g h_\varepsilon g^{-1}} A_g x = A_{AD_g h_\varepsilon} A_g x$$

def. akce   def. AD_g

Př: $A_g = L_g$, $a_m = r_m$ $\Rightarrow$ $L_{g*} r_m = r_{Ad_g m}$ * to je přesně ii) z L2

$M = G$

* Věta z L5 říká, že r_m je gen. $L_{\exp(\alpha m)}$

(podobně pro $A_g = R_g$, $a_m = l_m$)

Věta: A_g levá akce $[a_m, a_n] = -a_{[m,n]}$ ✱ je to důsledek $A_{g_1 g_2} = A_{g_1} A_{g_2}$

A_g pravá akce $[a_m, a_n] = a_{[m,n]}$ (násobení v grupě → skládání, gen. akce pro záv. Lie. alg → Lie. záv. gen. akce)

✱ typicky budeme mít přístup ke grupě skrze akci (např. izometrie prostoru) a bude nás zajímat grupa/algebra

✱ tzn. např. z Lie. z. izometrií (Kill. vekt.) vyčteme záv. na Lie. alg. (ze znalosti $[a_m, a_n]$ zjistíme $[m,n]$)

důk: ✱ pro levou ✱ vlastnost $\mathcal{L}$ ✱ důsledek věty z $\underline{14}$ (a_m je gen. toku $A_{\exp(\alpha m)}$)

$$[a_m, a_n] = \mathcal{L}_{a_m} a_n = -\frac{d}{d\alpha} A_{\exp(\alpha m)*} a_n \Big|_{\alpha=0} = -\frac{d}{d\alpha} a_{Ad_{\exp(\alpha m)} n}\Big|_{\alpha=0}$$

✱ z předch. Lemma

$$= -a_{\frac{d}{d\alpha} Ad_{\exp(\alpha m)} n |_{\alpha=0}} = -a_{ad_m n} = -a_{[m,n]}$$

✱ pže a_m je lin. v m

✱ def. ad $\frac{D\exp(\alpha m)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = m$

✱ věta o ad z $\underline{7}$

✱ podobně pro pravou

Př: $M = G$ $A_g = L_g$, $a_m = r_m \Rightarrow [r_m, r_n] = -r_{[m,n]}$ ✱ to je přesně 3) z $\underline{5}$

(podobně pro $A_g = R_g$, $a_m = l_m$)

Def: volná akce ≡ každý bod M se posune při netriv. akci G

efektivní akce ≡ alespoň jeden bod M se posune při netriv. akci G

tranzitivní akce ≡ každé dva body M lze spojit akcí G

jednoduše tranzitivní ≡ tranzitivní a volná (prvek z G spojující dva body z M je právě jeden, jinak by $g_1 g_2^{-1} x = x$)

Def: orbita bodu x ≡ $\mathcal{O}_x = \{A_g x, g \in G\}$

Def: homogenní G-prostor ≡ varieta M na níž G působí tranzitivně, tzn. $\mathcal{O}_x = M$

Def: stabilizátor bodu x ≡ $G_x = \{g \in G, A_g x = x\}$ (izotropní podgrupa G)

Lemma: H podgrupa G, $G/H = \{[g] : g \in G\}$ kde $[g] = \{\tilde{g} \in G : \exists h \in H : \tilde{g} = gh\} = gH$

$\Rightarrow G/H$ je homogenní G-prostor vůči $L_g[\tilde{g}] := [g\tilde{g}]$ ✱ $[g]$ je tř. ekv. vůči pravému nás. z podgrupy

důk: $[g_1], [g_2] \in G/H \Rightarrow \exists g = g_2 g_1^{-1} \in G : L_g[g_1] = [g_2]$ ✱ g je reprezentant $[g]$

Lemma: A_g akce G na M, $x \in M \Rightarrow \mathcal{O}_x \cong G/G_x$ ✱ orbita odpovídá třídě ekvivalence prvků G, které posouvají bod x do bodů na orbitě tzn. nefixující x (fixující identifikují s e)

důk: definujme zobrazení $\mathcal{O}_x \leftrightarrow G/G_x$

jako: $A_g x \in \mathcal{O}_x \longleftrightarrow [g] \in G/G_x$

konzistence: $x = A_g x \Leftrightarrow g \in G_x \Leftrightarrow [g] = [e]$ ✱ pže $gH = eH$ pro $g \in H$

nezávislost na g: $g' \in [g] \Leftrightarrow \exists h \in G_x : g' = gh \Leftrightarrow A_{g'} x = A_{gh} x = A_g A_h x = A_g x$

✱ tzn. všechny ekvivalentní prvky v $[g]$ dají stejný bod na orbitě

✱ G/G_x je prostor tříd ekvivalence $[g] = gG_x$ prvků G lišících se o pravé vynásobení stabilizátorem = ty prvky G co právě fixují x identifikuje $g h_x \sim g$

Věta: M homog. G-prostor $\Rightarrow$ $M \cong G/H$ pro nějakou podgr. H grupy G

důk: zvolme $x \in M$, pže M je homog. lze jej chápat jako $\mathcal{O}_x$
z předch. Lemmatu $H = G_x$

Př: $G = SO(3)$, $M = \mathbb{E}^3$ * $A_g, g \in G$ jsou všechny rotace

$\mathcal{O}_x = S^2$ * orbity jsou sféry kolem počátku

$G_x = SO(2)$ * $A_g, g \in G_x$ jsou rotace kolem osy z počátku do x

$\Rightarrow SO(3)/SO(2) \cong S^2$ * body na sféře jsou ekvivalentní třídě ekviv. transformací z x do těchto bodů orbity (tzn. modulo rotace kolem osy z počátku do x)

GRUPA ISOMETRIÍ A KILLINGOVY VEKTORY

Def: grupa isometrií $Iso(M,g)$ (metriky g na varietě M)
$\equiv$ podgrupa $Diff(M)$ (nás. je skládání $\varphi_1 \varphi_2 = \varphi_1 \circ \varphi_2$)
splňující:
$$\varphi_* g = g \quad * \ \varphi \in Iso(M,g)$$
$iso(M,g) \equiv$ Lie. alg. $Iso(M,g)$

Lemma: dimenze $Iso(M,g)$ je maximálně $\frac{(D+1)D}{2}$, $D = \dim M$

* grupa není zas tak velká (konečný počet nezávislých)

důk: studiem poč. úlohy Killingovy rovnice

* ne každá metrika má isometrii, je to vyjímečné

Def: levou akci $A\varphi$ zavedu jako působení φ
$$A\varphi x = \varphi x$$
označíme
$$a_s \equiv S \quad * \text{ generátor isom. asociovaný s } s,\ s \in iso(M,g)$$
$$exp(\tau s) \equiv \varphi_\tau \quad * \text{ 1-par. gr. isometrií asociovaná s } s \text{ daná exp. zobr.}$$

* φ_τ je tok jehož generátorem je a_s

pozn: $\mathcal{L}_{a_s} g = 0$ * a_s je Killingův vektor pže φ_τ je isometrie

$[a_m, a_n] = -a_{[m,n]}$ * pže $A\varphi$ je levá akce

* idea: mám varietu M s metrikou g a bokem její grupu isometrií $Iso(M,g)$ kterou působím na M skrze levou akci $A\varphi$
- ke každému prvku s z Lie. alg. $iso(M,g)$ mohu vyrobit generátor a_s což je Kill. vektor
- typicky začneme na M a najdeme symetrie g, spočítáme Lie. z. příslušných Kill. vektorů a_m a ze vztahu $[a_m, a_n] = -a_{[m,n]}$ odečteme závorky na Lie. alg.

pozn: e_α báze $iso(M,g)$
$K_\alpha \equiv a_{e_\alpha}$ * budeme volit různá písmena, ale stejné fonty
$[K_\alpha, K_\beta] = -c_{\alpha\beta}{}^\gamma K_\gamma$ * takto odečtu struk. konst ze závorek báze Kill. v.

"Rotace" Killingových vektorů * ne vždy význam rotace

$R \quad K_\mu$ * zvolme bázi Kill. vektorů splňující komutační rel.
* zde $\mu,\nu,\ldots$ vynechává R

$[R, K_\mu] = - c_{R\mu}{}^{\nu} K_\nu$ * takovou lze vždy zvolit, pže Π je antisym.

$V = V^\mu K_\mu, \quad V^\mu = \text{konst.}$ * vezmeme obecný KV, který je komb. K_μ a rotujeme ho pomocí R (typická situace)

* otočený * počáteční

$V_\varphi = R_{\varphi *} V_0$ * R_φ je isometrie s generátorem R, parametr. φ

* spočtěme derivaci:

* derivace push-fw. tokem je minus Lie. der podél generátoru toku

$$\frac{d}{d\varphi} V_\varphi = - \mathcal{L}_R V_\varphi = -[R, V_\varphi] = -[R, K_\mu] V_\varphi^\mu = c_{R\mu}{}^{\nu} K_\nu V_\varphi^\mu$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\varphi} V_\varphi^\nu = c_{R\mu}{}^{\nu} V_\varphi^\mu$$ * dostáváme maticovou rovnici

* pro komponenty

$$\Rightarrow V_\varphi^\nu = \exp(\varphi c_R)^\nu{}_\mu V_0^\mu$$ * maticová exponenciála (c_R je matice v indexech μ,ν)

* toto je důsledek vztahů pro obecnou akci obecné grupy

$R = a_r \qquad V = a_v$ * $r, v \in \mathfrak{g}$

$R_\varphi = A_{\exp(\varphi r)}$ * tok jehož gen. je a_r

$$V_\varphi = R_{\varphi *} V_0 = A_{\exp(\varphi r) *} a_{v_0} \stackrel{\uparrow}{=} a_{Ad_{\exp(\varphi r)} v_0} \stackrel{\uparrow}{=} a_{\exp(\varphi\, ad_r) v_0} \stackrel{\uparrow}{=} a_{\exp(\varphi c_R) \cdot v_0}$$

* lemma z 14 * věta z 7 * věta z 7
$ad_r m = [r, m] = c_R \cdot m$
$(ad_r{}^\alpha{}_\beta = c_{R\beta}{}^\alpha)$

* vyjádříme v komponentách
$V = V^\alpha a_{e_\alpha} \qquad v = V^\alpha e_\alpha$

$$= a_{e_\alpha \exp(\varphi c_R)^\alpha{}_\beta V_0^\beta} \stackrel{\uparrow}{=} a_{e_\alpha} \exp(\varphi c_R)^\alpha{}_\beta V_0^\beta \Rightarrow V_\varphi^\alpha = \exp(\varphi c_R)^\alpha{}_\beta V_0^\beta$$

* linearita a_m umožní vyndat konstanty $\exp(\varphi c_R)^\alpha{}_\beta V_0^\beta$ z argumentu m

Př Iso$(\mathbb{E}^2)$

generátory (Kill. vekt.)

$$X = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$Y = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$R = \frac{\partial}{\partial \varphi} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

toky

$\mathcal{X}_{\bar{x}}$ $\quad x(\mathcal{X}_{\bar{x}}\, x) = x(x) + \bar{x}$

$\quad y(\mathcal{X}_{\bar{x}}\, x) = y(x)$

$\mathcal{Y}_{\bar{y}}$ $\quad x(\mathcal{Y}_{\bar{y}}\, x) = x(x)$

$\quad y(\mathcal{Y}_{\bar{y}}\, x) = y(x) + \bar{y}$

$\mathcal{R}_{\bar{\varphi}}$ $\quad x(\mathcal{R}_{\bar{\varphi}}\, x) = \cos\bar{\varphi}\, x(x) - \sin\bar{\varphi}\, y(x)$

$\quad y(\mathcal{R}_{\bar{\varphi}}\, x) = \sin\bar{\varphi}\, x(x) + \cos\bar{\varphi}\, y(x)$

Lieovy závorky

$[X,R] = Y$

$[Y,R] = -X$

$[X,Y] = 0$

$\Rightarrow$ Lieova algebra iso$(\mathbb{E}^2)$

$c_{XR}{}^{Y} = -1$

$c_{YR}{}^{X} = 1$

$c_{XY}{}^{R} = 0$

$$c_R = \begin{bmatrix} c_{RX}{}^{X} & c_{RY}{}^{X} \\ c_{RX}{}^{Y} & c_{RY}{}^{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

* pozor co jsou řádky/sloupečky (viz $\mathrm{ad}_r{}^{\alpha}{}_{\beta} V^{\beta} = c_{R\beta}{}^{\alpha} V^{\beta}$)

Kill. metrika

$$k_{RR} = -\tfrac{1}{2}\left(c_{RX}{}^{Y} c_{RY}{}^{X} + c_{RY}{}^{X} c_{RX}{}^{Y}\right) = 1$$

$$k = \begin{array}{c|ccc} & X & Y & R \\ \hline X & 0 & 0 & 0 \\ Y & 0 & 0 & 0 \\ R & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

* degenerovaná (není poloprostá, má komut. podgr.)

Rotace Kill. vekt. $V = V^X X + V^Y Y$

$$\begin{bmatrix} V^X_{\bar{\varphi}} \\ V^Y_{\bar{\varphi}} \end{bmatrix} = \exp(\bar{\varphi} c_R) \begin{bmatrix} V_0^X \\ V_0^Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\bar{\varphi}\, V_0^X - \sin\bar{\varphi}\, V_0^Y \\ \sin\bar{\varphi}\, V_0^X + \cos\bar{\varphi}\, V_0^Y \end{bmatrix}$$

$$\exp(\bar{\varphi} c_R) = \cos\bar{\varphi} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin\bar{\varphi} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{pže} \quad c_R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ c_R^2 = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* c_R hraje roli komplexní jednotky

tzn. $V_{\bar{\varphi}} = \mathcal{R}_{\bar{\varphi}*} V_0 = (\cos\bar{\varphi}\, V_0^X - \sin\bar{\varphi}\, V_0^Y)\, X + (\sin\bar{\varphi}\, V_0^X + \cos\bar{\varphi}\, V_0^Y)\, Y$

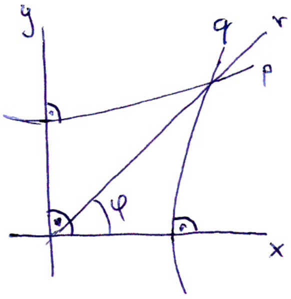
speciálně $\quad \mathcal{R}_{\bar{\varphi}*} X = \cos\bar{\varphi}\, X + \sin\bar{\varphi}\, Y$

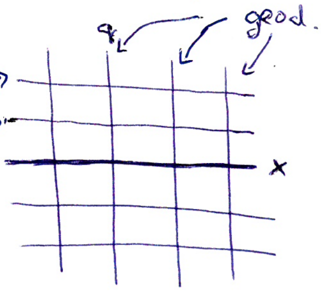
$\quad \mathcal{R}_{\bar{\varphi}*} Y = -\sin\bar{\varphi}\, X + \cos\bar{\varphi}\, Y$

Př: $Iso(\mathbb{L}^2)$

$$g = dr^2 + \mathrm{sh}^2 r\, d\varphi^2$$
$$= \mathrm{ch}^2 q\, dx^2 + dq^2$$
$$\left(= dp^2 + \mathrm{ch}^2 p\, dy^2\right)$$

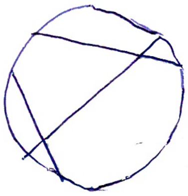
$$\mathrm{ch}\, r = \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, q$$
$$\tan\varphi = \frac{\mathrm{th}\, q}{\mathrm{sh}\, x}$$





* vezmu kolmé geod. a ze stejné vzd. z nich kolmě vyrazím po geod.
* potkají se pod úhlem, který je menší než pravý (opak u S^2)
* metrika je diag. v souř. x, q nebo p, y
* v souř. x, q
  ∂_q jsou geod.
  ∂_x nejsou geod. s výjimkou $q = 0$.
  (∀ mají konst. zakřiv.)

Beltrami-Kleinův disk

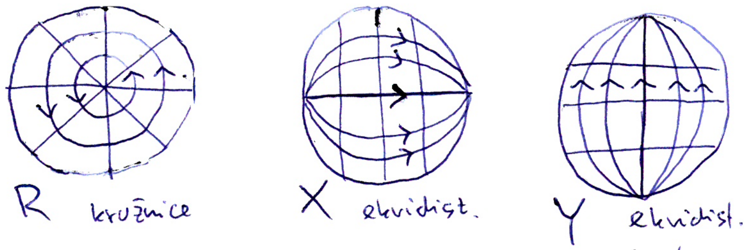


* model $\mathbb{L}^2$ v němž přímky jsou geodetiky
* není konformní (narozdíl od Poinc. disku)

generátory (Kill. vekt.)

$$X = \frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \sin\varphi \frac{1}{\mathrm{th}\, r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$
$$Y = \frac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos\varphi \frac{1}{\mathrm{th}\, r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$
$$R = \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

orbity



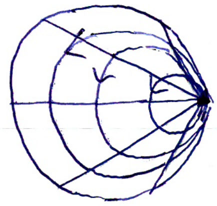
Lieovy závorky

$$[X, R] = Y$$
$$[Y, R] = -X$$
$$[X, Y] = R$$

* proto nelze zavést x, y souř.

$\Rightarrow$ Lieova alg. $iso(\mathbb{L}^2)$

$$c_{XR}{}^{Y} = -1$$
$$c_{YR}{}^{X} = +1$$
$$c_{XY}{}^{R} = -1$$



Kill. metrika

$$-k_{XX} = -k_{YY} = k_{RR} = 1$$

$$k = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & R \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

* nedegenerovaná Lorentzovská

* prostor generátorů s metrikou k = Minkowski p.č. v $d=3$ se souř. R, X, Y
  $\mathcal{R}_{\bar\varphi *}$ ~ rotace v X-Y
  $\mathcal{X}_{\bar x *}$ ~ boost v Y (čas R)
  $\mathcal{Y}_{\bar y *}$ ~ boost v X (čas R)
  tzn. $iso(\mathbb{L}^2) = so(1,2)$
* algebra isometrií $\mathbb{L}^2$ odpovídá $so(1,2)$ podalgebře isometrií Mink. p.č. v $d=3$

toky (v přizp. souř.)

$\mathcal{X}_{\bar x}$: $x(\mathcal{X}_{\bar x} x) = x(x) + \bar x$, $q(\mathcal{X}_{\bar x} x) = q(x)$ — translace X

$\mathcal{Y}_{\bar y}$: $p(\mathcal{Y}_{\bar y} x) = p(x)$, $y(\mathcal{Y}_{\bar y} x) = y(x) + \bar y$ — translace Y

$\mathcal{R}_{\bar\varphi}$: $r(\mathcal{R}_{\bar\varphi} x) = r(x)$, $\varphi(\mathcal{R}_{\bar\varphi} x) = \varphi(x) + \bar\varphi$ — rotace R

Rotace R Killingova vekt. $V = V^X X + V^Y Y$

$$\begin{bmatrix} V^X_{\bar\varphi} \\ V^Y_{\bar\varphi} \end{bmatrix} = \underbrace{\exp(\bar\varphi c_R)}\begin{bmatrix} V_0^X \\ V_0^Y \end{bmatrix}$$

$$= \cos\bar\varphi \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin\bar\varphi \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{kde} \quad c_R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; c_R^2 = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

speciálně

$$\mathcal{R}_{\bar\varphi *} X = \cos\bar\varphi\, X + \sin\bar\varphi\, Y$$

$$\mathcal{R}_{\bar\varphi *} Y = -\sin\bar\varphi\, X + \cos\bar\varphi\, Y$$

Translace X Killingova vekt. $V = V^R R + V^Y Y$

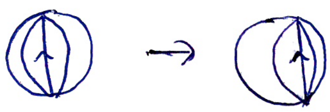
$$\begin{bmatrix} V^R_{\bar x} \\ V^Y_{\bar x} \end{bmatrix} = \underbrace{\exp(\bar x c_X)}\begin{bmatrix} V_0^R \\ V_0^Y \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{ch}\bar x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \operatorname{sh}\bar x \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{kde} \quad c_X = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; c_X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

speciálně

$$\mathcal{X}_{\bar x *} R = \operatorname{ch}\bar x\, R - \operatorname{sh}\bar x\, Y$$

$$\mathcal{X}_{\bar x *} Y = -\operatorname{sh}\bar x\, R + \operatorname{ch}\bar x\, Y$$



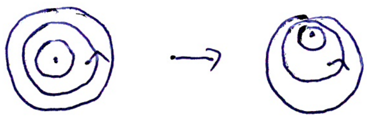
Translace Y Killingova vekt. $V = V^R R + V^X X$

$$\begin{bmatrix} V^R_{\bar y} \\ V^X_{\bar y} \end{bmatrix} = \underbrace{\exp(\bar y c_Y)}\begin{bmatrix} V_0^R \\ V_0^Y \end{bmatrix}$$

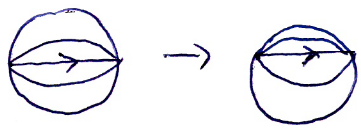
$$= \operatorname{ch}\bar y \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \operatorname{sh}\bar y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{kde} \quad c_Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; c_Y^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

speciálně

$$\mathcal{Y}_{\bar y *} R = \operatorname{ch}\bar y\, R + \operatorname{sh}\bar y\, X$$



$$\mathcal{Y}_{\bar y *} X = \operatorname{sh}\bar y\, R + \operatorname{ch}\bar y\, X$$



*alternativně přes diferenciál toku

$$D\mathcal{R}_{\bar\varphi}\big|_x = dr\big|_x \frac{\partial}{\partial r}\Big|_{\mathcal{R}_{\bar\varphi} x} + d\varphi\big|_x \frac{\partial}{\partial\varphi}\Big|_{\mathcal{R}_{\bar\varphi} x}$$

$$(\mathcal{R}_{\bar\varphi *} X)\big|_{\mathcal{R}_{\bar\varphi} x} = \mathcal{R}_{\bar\varphi *}(X|_x) = X|_x \cdot D\mathcal{R}_{\bar\varphi}\big|_x = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r}\Big|_{\mathcal{R}_{\bar\varphi} x} - \sin\varphi \frac{1}{\operatorname{th} r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big|_{\mathcal{R}_{\bar\varphi} x}$$

$$\left[\text{pozn: } \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\Big|_{\mathcal{R}_{\bar\varphi} x} &= \cos(\varphi+\bar\varphi)\, X|_{\mathcal{R}_{\bar\varphi} x} + \sin(\varphi+\bar\varphi)\, Y|_{\mathcal{R}_{\bar\varphi} x} \\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\Big|_{\mathcal{R}_{\bar\varphi} x} &= \operatorname{th} r\left(-\sin(\varphi+\bar\varphi)\, X|_{\mathcal{R}_{\bar\varphi} x} + \cos(\varphi+\bar\varphi)\, Y|_{\mathcal{R}_{\bar\varphi} x}\right) \end{aligned}\right]$$

$$= \cos\bar\varphi\, X|_{\mathcal{R}_{\bar\varphi} x} + \sin\bar\varphi\, Y|_{\mathcal{R}_{\bar\varphi} x} \Rightarrow \mathcal{R}_{\bar\varphi *} X = \cos\bar\varphi\, X + \sin\bar\varphi\, Y$$

REPREZENTACE LIE. G. A LIE. ALG. (NA VEKT. PR.)

* to je speciální případ akce – lin. působení na vekt. prostoru

Def: $T: G \to V^1_1$ tzn. $g \to T_g{}^A{}_B$ * $A, B \dots$ jsou indexy na V^1_1

$T_{g_1 g_2} = T_{g_1} \cdot T_{g_2}$ tzn. $T_{g_1 g_2}{}^A{}_B = T_{g_1}{}^A{}_C \, T_{g_2}{}^C{}_B$ * T_g je operátor na V

Def: $t: \mathfrak{g} \to V^1_1$ tzn. $m \to t_m{}^A{}_B$ * podobně t_m je op. na V

lin. v m tzn. $t_m{}^A{}_B = m^\mu t_\mu{}^A{}_B$ * pro $\mathfrak{g}$ vekt. pr., můžeme požadovat linearitu a reprezentovat závislost na m tenzorem $t_\mu{}^A{}_B$

$t_{[a,b]} = [t_a, t_b] = t_a \cdot t_b - t_b \cdot t_a$

* komutátor operátorů (tenz. V^1_1)

* definuji i když $\mathfrak{g}$ je obecná Lie. alg. (nemusí to Lie alg. Lie. g. G)

Pozn: lze přepsat pomocí c

$$c_{\mu\nu}{}^{\varkappa} t_\varkappa{}^A{}_B = t_\mu{}^A{}_C \, t_\nu{}^C{}_B - t_\nu{}^A{}_C \, t_\mu{}^C{}_B$$

* kdybychom napsali pro ad, dostaneme Jacobi. id.

Lemma: reprezentace T_g je akce

důk: splňuje def. akce kde $M = V$

pro $\phi \in V$ působí jako $(T_g \phi)^A = T_g{}^A{}_B \phi^B$

Def: generátor reprezentace T_g * pozor: další význam slova "generátor" (ukážeme souvislost)

$$t_m = \frac{d}{d\varepsilon} T_{g_\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \qquad \frac{Dg_\varepsilon}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = m \qquad g_0 = e$$

* později ověříme, že to je repr. (proto stejné písmeno)

* Všimněme si, že t_m je operátor na V tzn. tenzor V^1_1 zatímco generátor T_g jakožto akce je vektorové pole na varietě M

* tato varieta je ale vektorový prostor $M = V \Rightarrow$ není potřeba zde rozlišovat tečné prostory v různých bodech V, tzn. tečné vekt. z $T_\phi V$ lze parallelně přesunout do počátku $\phi = 0$ a identifikovat je přímo s vektory z V

* toto dává do souvislosti generátor T_g jakožto akce a jakožto reprezentace

Věta: T_g repr. G na V * tzn. je to i akce na V

$\text{\texttt{t}}_m$ gen. akce T_g tj. vekt. pole na V

t_m gen. repr. T_g tj. operátor na V = tenzor V^1_1

platí

$$\text{\texttt{t}}_m\big|_\phi = t_m \cdot \phi$$

* při identifikaci tečných vektorů na V s vektory V tzn. $T_\phi V \simeq V$

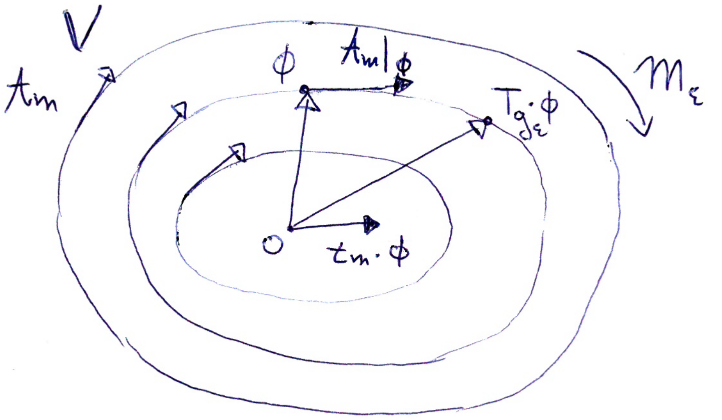
důk:

$$\text{\texttt{t}}_m\big|_\phi \overset{\text{* def. gen. akce}}{=} \frac{D}{d\varepsilon} T_{g_\varepsilon} \phi \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} T_{g_\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \cdot \phi \overset{\text{* def. gen. repr.}}{=} t_m \cdot \phi$$

* pro akce zprostředkované zúžením s tenzorem

$$\frac{Dg_\varepsilon}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = m \qquad g_0 = e$$

* tzn. $\text{\texttt{t}}_m$ závisí lineárně na bodu ϕ pro $t_m = \text{konst}$



* při působení T_{g_ε} na ϕ se posuneme do $T_{g_\varepsilon}\phi$ podél orbit A_m, které je gen. toku $M_\varepsilon = T_{\exp(\varepsilon m)}$
* pže varieta je vekt. prostor, mohu $A_m|_\phi$ identifikovat s vektorem v počátku
* operátor který mění ϕ na takovýto vektor je t_m

* celé vekt. pole A_m je zakódováno v operátoru t_m způsobem, že jeho hodnota ve ϕ je dána působením t_m na toto ϕ (tzn. když utrhnu info o ϕ tak A_m odpovídá t_m)

Věta: t_m je reprezentace $\mathfrak{g}$ * $\mathfrak{g}$ je Lie.alg. Lie.g. G

důk: * splňuje definici repr. $\mathfrak{g}$ * t_m je vyrobená z T_g

(a) linearita v m: * z předch. věty a definice A_m

$$t_m\cdot\phi \overset{*}{=} (T_m\cdot\phi)_*|_e$$

* tzn. z linearity push-fw. dostává linearitu v m

(b) uzavřenost závorky $[t_m,t_n]$:

víme, že $[A_m,A_n] = -A_{[m,n]}$ * věta z L15

mějme $F\in\mathcal{F}V$ * fce na V, tzn. $F=F(\phi)$

nechť D derivace na V * obyč. der. podle ϕ pže V lineární

identifikuji $T_\phi V \simeq V$ * indexy všechny jako má ϕ

* počítám:

$$A_m[F]|_\phi = A_m{}^A|_\phi\, D_A F|_\phi = D_A F|_\phi\, t_m{}^A{}_B\, \phi^B$$

* derivace ve směru pomocí gradientu F
* dosadím $A_m|_\phi = t_m\cdot\phi$
* derivování F ve směru pole A_m v bodě ϕ
* t_m je konst., ale objevila se explicitní závisl. na ϕ

* budu počítat Lie. z. vekt. polí z definice

LS: $$[A_m,A_n][F]|_\phi = A_m[A_n[F]]|_\phi - m\leftrightarrow n = D_K\left(D_L F|_\phi\, t_n{}^L{}_M\, \phi^M\right) t_m{}^K{}_N\, \phi^N - m\leftrightarrow n$$

* dosadím vztah pro $A_m[F]|_\phi$

* Leibniz $D_K\phi^M=\delta^M_K$, $t_m=$ konst

$$\overset{*}{=} \underbrace{D_K D_L F|_\phi \left(t_n{}^L{}_M\, t_m{}^K{}_N - m\leftrightarrow n\right)\phi^M\phi^N}_{=0} + D_L F|_\phi \underbrace{\left(t_n{}^L{}_M\, t_m{}^M{}_N - m\leftrightarrow n\right)}_{-[t_m,t_n]^L{}_N}\phi^N$$

* symetrie v M,N a v K,L (sym. derivací)
* komutátor

$$= -DF|_\phi\cdot[t_m,t_n]\cdot\phi$$

PS: $$-A_{[m,n]}|_\phi = -DF|_\phi\cdot t_{[m,n]}\cdot\phi$$

$\Big\}\Rightarrow [t_m,t_n] = t_{[m,n]}$

* dosadím vztah pro $A_m[F]|_\phi$

pozn: z lin: $t_m{}^A{}_B = m^\mu\, t_\mu{}^A{}_B$ * gen. repr. Lie. alg. dán tenzorem $t_\mu{}^A{}_B \in \mathfrak{g}^*\otimes V^1_1$

Věta: $T_{\exp m} = \exp t_m$

- * $\exp m$ je exp. zobr. tzn prvek G, $T_{\exp m}$ je lin. operátor (tenzor V^1_1)
- * t_m je lin. operátor a $\exp t_m$ je "maticová" exp. tenzoru V^1_1

důk:

$T_{\exp(\alpha m)}$ splňuje vlast. "maticové" exponenciály

$$T_{\exp(\alpha m)}\big|_{\alpha=0} = T_e = \delta$$

$$\frac{d}{d\alpha} T_{\exp(\alpha m)}\Big|_{\alpha=\alpha_0} \underset{\uparrow}{=} \frac{d}{d\varepsilon} T_{\exp((\alpha_0+\varepsilon)m)}\Big|_{\varepsilon=0} \underset{\uparrow}{=} \frac{d}{d\varepsilon} T_{\exp(\varepsilon m)}\Big|_{\varepsilon=0} \cdot T_{\exp(\alpha m)} \underset{\uparrow}{=} t_m \cdot T_{\exp(\alpha m)}$$

* $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon$

* def. exp. zobr. T je repr.

* def. t_m

$$\Rightarrow T_{\exp(\alpha m)} = \exp(\alpha t_m)$$