HODGEOVA TEORIE

* rozklad anti-syn. forem na (ko)potenciálové formy
* souvislost s Laplaceovým operátorem na formách

VNĚJŠÍ KALKULUS (OPAKOVÁNÍ A NOTACE)

$\Omega^p M \qquad \wedge \quad d$ * pro anti-syn. jsme def. vnější součin a derivaci

$\qquad\qquad * \quad \nabla$ * máme metriku, tzn. def. Hodge. duál pomocí Levi-Čiv. tenz. ε, a také Levi-Čiv. kov. der.

* vztah vnější a kov. der:

$$d = \nabla\wedge \qquad d_{a_0}\omega_{a_1\dots a_p} = (p+1)\nabla_{[a_0}\omega_{a_1\dots a_p]}$$

* Hodgeův duál: * kontrakce a $1/p!$

$$*\omega = {}^{\#}\omega \bullet \varepsilon \qquad (*\omega)_{a_{p+1}\dots a_d} = \frac{1}{p!}\,\omega^{a_1\dots a_p}\varepsilon_{a_1\dots a_d}$$

$$*^{-1} = (\operatorname{sign} g)(-1)^{p(d-p)}*$$

* inverze je Hodge až na zn. $** = \llcorner\, id$
* zde působím na p-formu

* součiny dvou p-forem:

$$\omega\bullet\sigma = \omega\bullet{}^{\#}\sigma = \frac{1}{p!}\,\omega_{a_1\dots a_p}{}^{\#}\sigma^{a_1\dots a_p}$$

* $1/p!$ kvůli $p!$ ekviv. příspěvků

$$\omega \,\hat{\wedge}\, \sigma = \omega\wedge(*\sigma) = *(\omega\bullet\sigma) = (\omega\bullet\sigma)\varepsilon$$

* ukázali jsme

* divergence a rotace: * ekvivalentně

$$\operatorname{div}\omega = *^{-1}d*\omega \qquad *\operatorname{div}\omega = d*\omega$$

$$\operatorname{rot}\omega = *^{-1}d\omega \qquad *\operatorname{rot}\omega = d\omega$$

(pouze dualizovaná vn. der., moc se nezavádí)

* vztah div. a kov. der.:

$$(\operatorname{div}\omega)_{a_1\dots a_p} = \nabla^{n}\omega_{a_1\dots a_p n}$$

* kontrakce zezadu, ω je $(p+1)$-forma

$$= (-1)^p\nabla^{n}\omega_{n a_1\dots a_p}$$

* kontrakce zepředu

* koderivace:

$$\delta\omega = -\nabla\cdot\omega = (-1)^{p+1}\operatorname{div}\omega = (-1)^{p+1}*^{-1}d*\omega$$

* ω je $(p+1)$-forma
* pouze notace pro div. (mínus diverg. zepředu)

* vlastnosti:

$$dd = 0\ , \quad \delta\delta = 0\ , \quad \operatorname{div}\operatorname{div} = 0\ , \quad \operatorname{div}\operatorname{rot} = 0\ , \quad \operatorname{rot} d = 0$$

* důsledky $dd = 0$

* de Rham-Laplace:

$$\Delta \equiv d\delta + \delta d = -[d-\delta]^2$$

* $D \equiv d - \delta = \nabla\wedge + \nabla\cdot = \nabla\circ$ je Dirac. op. ($\circ$: násobení na ΩM)
když se spinory reprezentují jako nehomog. antisym. formy $\Omega M = \bigoplus_p \Omega^p M$ (vnější algebra)

* zde $\delta \equiv (-1)^{\pi}*^{-1}d*$, π je op. stupně formy rozšířený na nehomogenní

* Beltrami-Laplace:

$$\nabla^2 \equiv g^{ab}\nabla_a\nabla_b$$

* jiný op. 2. řádu, liší se o členy 0. řádu

* Weitzenbockova identita (důkaz ve skriptech)

$$(\Delta\omega)_{a_1\dots a_p} = -\nabla^2\omega_{a_1\dots a_p} + p\,Ric_{n[a_1}\omega^{n}{}_{a_2\dots a_p]} - \frac{p(p-1)}{2}R_{mn[a_1a_2}\omega^{mn}{}_{a_3\dots a_p]}$$

* vztah mezi Δ a ∇^2 přes křivost (členy lze napsat pomocí $\wedge$)

* znaménko souvisí s tím, že Δ je typicky pos. def. (pro Riem. metr.), zatímco ∇^2 je neg.-def.

Lemma: i) $d\Delta = \Delta d$

ii) $\delta\Delta = \Delta\delta$

iii) $*\Delta = \Delta *$

důk: i) a ii) z definice Δ, $d(\cancel{d\delta} + \delta d) = (d\delta + \cancel{\delta d})d$ * podobně ii)

iii) při působení na p-formu $\delta = (-1)^p *^{-1} d *$ * id

$$*\Delta = *(d\delta + \delta d) = (-1)^p * d *^{-1} d * + (-1)^{p+1} * *^{-1} d * d\_\_$$

* kodev. působí na p-f. a (p+1)-f.

* v prvním chci $*^{-1}d*d*$ a ve druhém $d*^{-1}d**$, $s \equiv \mathrm{sign}\,g$

$$= (-1)^p[s(-1)^{p(d-p)}*^{-1}]\,d\,[s(-1)^{(d-p+1)(p-1)}*]\,d*$$

$$+(-1)^{p+1}d\,[s(-1)^{(p+1)(d-p-1)}*^{-1}]\,d\,[s(-1)^{p(d-p)}**]$$

$$= \underbrace{(-1)^{d-p+1} *^{-1}d*}_{\delta}d* + d\underbrace{(-1)^{d-p}*^{-1}d*}_{\delta}* = \Delta *$$

* sečtení a využití $(-1)^2=1$, $s^2=1$

* vše bylo pro homogenní formy Ω^pM, linearitou lze rozšířit na nehomogenní formy ΩM

* výsledek působení $D = d - \delta$ je nehomogenní (d zvyšuje stupeň, zatímco δ snižuje), ale $\Delta = -D^2$ stupeň zachovává

* alternativní zápis Δ:

$$\Delta = -[\nabla\wedge\nabla\cdot + \nabla\cdot\nabla\wedge]$$ * pže $d = \nabla\wedge$ a $\delta = -\nabla\cdot$

$$= (-1)^p[-*^{-1}d*d + d*^{-1}d*]$$ * pže $\delta = (-1)^p *^{-1}d*$ na p-formu

$$= s(-1)^{d(p+1)}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} + (-1)^p\,d\,\mathrm{div}$$ * zobecnění "rotrot je graddiv mínus Laplace", z definic rot a div

LOKÁLNÍ HODGEOVO ROZŠTĚPENÍ

* nebudou nás zajímat globální vlastnosti (nekonečna, kompaktnost, okraj. podm.)
* nebude záviset na signatuře (ale zase nebude mít takové důsledky jako globální, kde budeme předpokládat Riemanovskou metriku)
* budeme předpokládat:

UCM topologicky triviální * kontrahovatelnost (bude)

g nedegenerovaný * obecná signatura

Poincarého lemma:

$d\omega = 0 \Leftrightarrow \exists \sigma : \omega = d\sigma$ * na "$\Rightarrow$" potřeba top. triv. U

* σ "potenciál"

ko-Poincarého lemma:

$\delta\omega = 0 \Leftrightarrow \exists\sigma : \omega = \delta\sigma$ * σ "kopotenciál"

důk: * z předchozího pomocí Hodge duálu

$\delta\omega = 0 \Leftrightarrow d*\omega = 0 \Leftrightarrow *\omega = d\alpha \Leftrightarrow \omega = *^{-1} d\alpha = \delta\sigma$

$\uparrow$ * Poinc. lemma $\qquad \uparrow$ * kde $\sigma = \pm *\alpha$

Věta: Hodgeovo rozštěpení * dává potenciál a kopotenciál pro obecnou ω

$\omega \in \Omega^p U \Rightarrow \omega = d\alpha + \delta\beta$ * platí i pro nehomog., $\omega \in \Omega U$

* důk: nedokážeme, ale ukážeme ekvivalenci s existencí řeš. Poissonovy rce.

Lemma: kalibrační podmínky

vždy lze zvolit α a β tak, aby

$\delta\alpha = 0 \qquad d\beta = 0$

důk:

$\omega = d\tilde{\alpha} + \delta\tilde{\beta}$ * mějme rozštěpení kde $\delta\tilde{\alpha} \neq 0$ a $d\tilde{\beta} \neq 0$

* použijeme rozštěpení na $\tilde{\alpha}$ a $\tilde{\beta}$

$\tilde{\alpha} = d\varkappa + \delta\lambda \qquad \tilde{\beta} = d\mu + \delta\nu$

* označíme

$\alpha \equiv \delta\lambda \qquad \beta \equiv d\mu$

* platí:

$d\alpha = d\tilde{\alpha} \qquad \delta\beta = \delta\tilde{\beta}$

$\delta\alpha = 0 \qquad d\beta = 0$

* tzn. α má stejnou vnější der. a nulovou ko-der, podobně pro β

* α a β můžeme použ. v rozštěp. ω

$\Rightarrow \omega = d\alpha + \delta\beta$

* pozn: stejné podmínky lze uložit i v Poinc. a ko-Poinc lemmatech

Věta: superpotenciál (řeš. Poiss. rce)

$\forall\omega \in \Omega^p U : \exists\varphi \in \Omega^p U$ * platí i pro nehomog., $\omega \in \Omega U \quad \varphi \in \Omega U$

$\Delta\varphi = \omega$ * φ je řešení Poiss. rce se zdrojem ω

důk: * nebudeme dokazovat přímo, ukážeme ekvivalenci s Hodge. rozšt.

"Hodge. rozšt. $\Rightarrow$ superpot."

$$\omega = d\alpha + \delta\beta$$

*(jako dříve) použijeme rozšt. na α a β, teď včetně kalibrace

$$\alpha = d\varkappa + \delta\lambda \qquad \beta = d\mu + \delta\nu$$
$$d\lambda = 0 \qquad \delta\mu = 0$$

* označíme

$$\varphi \equiv \lambda + \mu$$

* platí:

$$\Delta\varphi = \underbrace{[d\delta + \delta d]\varphi}_{\text{def. } \Delta} \overset{\text{def. }\varphi,\ d\lambda=0,\ \delta\mu=0}{=} d\delta\lambda + \delta d\mu = d\alpha + \delta\beta$$

* proto $\delta\lambda = \alpha - d\varkappa$, $d\mu = \beta - \delta\nu$, navíc $d^2=0$, $\delta^2=0$

"superpot. $\Rightarrow$ Hodge. rozšt.

$$\omega = \Delta\varphi$$

* označíme

$$\alpha \equiv \delta\varphi \qquad \beta \equiv d\varphi$$

* platí

$$\omega = d\delta\varphi + \delta d\varphi = d\alpha + \delta\beta$$

* dokonce i s kalibrací $\delta\alpha = 0 = d\beta$

nejednoznačnost rozštěpení $\omega = d\alpha + \delta\beta$

* α, β nejsou jednozn.: $\alpha \to \alpha + d\varphi$ a $\beta \to \beta + \delta\psi$ dá totéž (viz kalibrace)
* $d\alpha, \delta\beta$ nejsou jednozn.:

$$\exists \alpha, \beta: \quad 0 = d\alpha + \delta\beta \qquad d\alpha \neq 0 \quad \delta\beta \neq 0$$

* v kalibraci $\delta\alpha = 0$, $d\beta = 0$
* netriv. rozklad nuly
* z ekvivalence s existencí superpotenciálu

$$0 = \Delta\varphi \qquad \alpha = \delta\varphi \qquad \beta = d\varphi$$

* tzn. α a β je generované řešením Lapl. rce
* obecně existují netriv. řešení včetně $\delta\varphi \neq 0$, $d\varphi \neq 0$ (to uvidíme v příkladu níže)

$$\Delta\varphi = 0 \quad \not\Rightarrow \quad \delta\varphi = 0 \quad d\varphi = 0$$

* globálně na Riem. kompakt. to bude platit (např. $\Delta\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \text{konst}$ pro 0-formy $\equiv$ fce)

Def: prostor harmonik $\mathcal{H}^p_\Delta U$

$$\gamma \text{ je harm.} \equiv \Delta\gamma = 0$$

* závisí na metrice skrze Δ (kupodivu dim. $\mathcal{H}^p_\Delta U$ na Δ nezávisí)

Př: E^3 $\quad g = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \varepsilon = dx \wedge dy \wedge dz \quad \Delta = -\nabla^2 = -[\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2]$

$$\sigma = xyz\, dz \qquad \Delta\sigma = 0$$

* proto σ lineární v souř. a Δ má 2. der. (ověříme níže)

* napočítáme odpovídající rozklad nuly

$\alpha = \delta\sigma = -\nabla\cdot\sigma = -xy$ ← * $-\partial_z(xyz)$ $\delta\alpha = 0$ ← * pže α je 0-forma

$\beta = d\sigma = yz\, dx\wedge dz + xz\, dy\wedge dz$ $d\beta = 0$

$d\alpha = -y\,dx - x\,dy$

$\delta\beta = -\nabla\cdot\beta = y\,dx + x\,dy$

← * $-\partial_x(yz)\,dz + \partial_z(yz)\,dx - \partial_y(xz)\,dz + \partial_z(xz)\,dy$

* vyruší se, čímž jsme i ověřili $\Delta\sigma = 0$

* pozn: $\delta\sigma$ i $\delta\beta$ by šlo také spočítat pomocí $\delta = (-1)^p *^{-1} d *$

$\Rightarrow d\alpha + \delta\beta = 0$ avšak $d\alpha \neq 0$ $\delta\beta \neq 0$ * netriviální rozklad nuly

* je to protože σ roste v nekonečnu

* těchto řešení by se dalo zbavit požadavkem aby šlo do nuly v nekonečnu pak by jediné řešení bylo $\sigma = 0$

* kdybychom řešili na oblasti s hranicí, tak bychom zadali okrajové podm.

* uděláme ještě snažší požadavek – kompaktnost (tzn. žádné nekonečno, ani hranice) – je to technicky snažší protože nemusíme vůbec nic navíc specifikovat (žádné chování v nek. ani okrajové podm.)

GLOBÁLNÍ HODGEOVO ROZŠTĚPENÍ

M – kompaktní (a bez hranice) * tzn. žádná hranice nebo nekonečno, kde bychom museli zadat podmínky na řešení

– Riemanovská * abychom měli skalární součin (pos. def. metrika)

– orientovatelná * budeme moci integrovat přímo formy (ne pouze hustoty)

* toto zjednodušení limituje fyzikální aplikace (např. prostorové řezy v kompaktní kosmologii)

* teď budou formy definované na celé M (ne pouze $U\subset M$)

Def: skalární součin na $\Omega^p M$

$$\langle\alpha,\beta\rangle = \int_M \alpha\wedge *\beta = \int_M (\alpha\bullet\beta)\,\varepsilon$$

← * sk. souč. v bodě

← * sk. souč. polí (tj. ve funkcionálním smyslu)

* je symetrický $\langle\alpha,\beta\rangle = \langle\beta,\alpha\rangle$
* $\langle\alpha,\alpha\rangle > 0$ pro $\alpha\neq 0$, nulové pro $\alpha = 0$ tzn. $\langle\,,\rangle$ je pos. def.

* v $\alpha\bullet\beta$ se zvedají indexy – aby výsledek $\langle\alpha,\alpha\rangle$ byl vždy kladný musí být metrika pos. def.

* lze rozšířit na nehomogenní požadavkem $\langle\alpha,\beta\rangle = 0$ pokud jsou α a β různého stupně a dále linearitou

Lemma: i) $\langle d\alpha,\beta\rangle = \langle\alpha,\delta\beta\rangle$ * tzn. $d^+ = \delta$ (sdružené) ← vůči $\langle\,,\rangle$

ii) $\langle\Delta\alpha,\beta\rangle = \langle\alpha,\Delta\beta\rangle$ * tzn. $\Delta^+ = \Delta$ (symetrický)

$= \langle\delta\alpha,\delta\beta\rangle + \langle d\alpha,d\beta\rangle$ * $\Delta > 0$ (pos-def.)
tzn. $\langle\Delta\alpha,\alpha\rangle > 0$, $\alpha\neq 0$
(Δ má kladné spektrum)

* pozn: "$d^+ = \delta$" je ve smyslu skal. součinu na ΩM (tzn. nehomog.)

důk:

* Leibniz., $d\alpha$ a β jsou p-formy, tzn. α je (p-1)-forma

i) $$\langle d\alpha, \beta\rangle = \int_M (d\alpha)\wedge(*\beta) \overset{*}{=} \int_M d(\alpha\wedge *\beta) - \int_M (-1)^{p-1}\alpha\wedge(d*\beta)$$

$$= \underbrace{\int_{\partial M} (\alpha\wedge *\beta)\Big|_{\partial M}}_{=0} + \int_M (-1)^p \alpha\wedge *(*^{-1} d*\beta) = \int_M \alpha\wedge(*\delta\beta)$$

* Stokesova věta v prvním členu, vložení $**^{-1} = id$ do druhého členu

* pže $\partial M = \emptyset$

* kdybych měl hranici nebo by nebylo kompaktní, musel bych zajistit aby člen vypadl buď okrajovými podmínkami ~~na~~ formy (nulové normálové/tečné složky α) nebo aby šel v nekonečnu dost rychle do nuly

* def. δ, β je p-forma

ii) z def. $\Delta = d\delta + \delta d$, linearity $\langle , \rangle$ a použitím i)

Věta: globální harmoniky

$\gamma \in \mathcal{H}^p_\Delta M$ tj. $\Delta\gamma = 0 \iff d\gamma = 0 \quad \delta\gamma = 0$. * lokálně "$\Rightarrow$" neplatilo

důk:

"$\Leftarrow$": zřejmé

"$\Rightarrow$": $0 \overset{\uparrow}{=} \langle \gamma, \Delta\gamma\rangle \overset{\uparrow}{=} \langle d\gamma, d\gamma\rangle + \langle \delta\gamma, \delta\gamma\rangle \overset{\uparrow}{\Rightarrow} d\gamma = 0 \quad \delta\gamma = 0$

* $\Delta\gamma = 0$ * předch. lemma * pos. def. $\langle , \rangle$ (součet 0 pouze když každé zvlášť 0 norma 0 ~~pouze~~ když forma nulová)

Věta: $\mathcal{H}^p_\Delta M$ má konečnou dim.

* bez důkazu
* tzn. $\Delta\gamma = 0$ má velmi málo řešení (pro 0-formu jen konstanta, dim = 1), pouze lin. kombinace konečného počtu s konst. koeficienty
* obecně neplatí na nekompaktních (harmoniky na $\mathbb{R}^2$ ~ holomorfní fce)
* dim $\mathcal{H}^p_\Delta M$ bude odpovídat topologické netrivialitě M, tj. "počet děr"

Věta: Hodgeovo rozštěpení (globální)

$\omega \in \Omega^p M \Rightarrow \omega = d\alpha + \delta\beta + \gamma$, $\gamma \in \mathcal{H}^p_\Delta M$ * platí i pro nehom., $\omega \in \Omega M$

$d\alpha$ exaktní část $\qquad$ α potenciál

$\delta\beta$ koexaktní část $\qquad$ β kopotenciál

γ harmonická část

rozštěpení na $d\alpha, \delta\beta, \gamma$ je jednoznačné

důk: * existence: bez důkazu

* jednozn.: z ortogonality částí (vůči $\langle , \rangle$) - kolmé se nemohou vyrušit

$$\langle d\alpha, \delta\beta\rangle = \langle \alpha, \underbrace{\delta^2\beta}_{=0}\rangle = 0 \qquad \langle d\alpha, \gamma\rangle = \langle \alpha, \underbrace{\delta\gamma}_{=0}\rangle = 0 \qquad \langle \delta\beta, \gamma\rangle = \langle \beta, \underbrace{d\gamma}_{=0}\rangle = 0$$

* využiju lemma z 5 a pak $\delta^2 = 0$ nebo $\gamma \in \mathcal{H}^p_\Delta M$ a větu o glob. harm.

Lemma: kalibrační podmínky

vždy lze zvolit α a β aby

$\delta\alpha = 0 \quad d\beta = 0 \quad \alpha, \beta$ nemá harm. část.

důk: * podobně jako lok. Hodge. rozšť. ($\alpha \equiv$ koex. č. $\tilde{\alpha}$, $\beta \equiv$ exakt. č. $\tilde{\beta}$)

$\omega = d\tilde{\alpha} + \delta\tilde{\beta} + \gamma$

* rozštěpím $\tilde{\alpha}$ a $\tilde{\beta}$

$\tilde{\alpha} = d\varkappa + \delta\lambda + \gamma \qquad \tilde{\beta} = d\mu + \delta\nu + \sigma$

* označíme

$\alpha \equiv \delta\lambda \qquad \beta \equiv d\mu \qquad$ * nemají harm. části

* platí

$d\alpha = d\tilde{\alpha} \qquad \delta\beta = \delta\tilde{\beta}$

$\delta\alpha = 0 \qquad d\beta = 0$

* α a β můžeme použít v rozšť. s původní γ

$\Rightarrow \omega = d\alpha + \delta\beta + \gamma$

Věta: superpotenciál (řeš. Poiss. rce)

$\Delta\varphi = \omega$ má řešení $\Leftrightarrow$ ω nemá harm. část

* pozor: na kompaktní varietě nemusí pro každý zdroj existovat řešení Poiss. rce (pouze pokud nemá harm. část, tak existuje)

důk: * podobně jako u lok. verze, ale využije se jednozn. na absenci harm. č.

"$\Rightarrow$": $\quad \omega = \Delta\varphi = d(\delta\varphi) + \delta(d\varphi) \Rightarrow$ nemá harm. č.

* def. Δ $\qquad$ * z jednoznačnosti glob. rozšť.

"$\Leftarrow$": $\quad \omega = d\alpha + \delta\beta$

* použijeme glob. rozšť. na α a β včetně kalibrace

$\alpha = d\varkappa + \delta\lambda + \varrho \qquad \beta = d\mu + \delta\nu + \sigma$

$d\lambda = 0 \qquad \delta\mu = 0$

* označím

$\varphi \equiv \lambda + \mu$

* platí $\qquad$ * def. φ, $d\lambda = 0$, $\delta\mu = 0$

$\Delta\varphi = [d\delta + \delta d]\varphi \overset{!}{=} d\delta\lambda + \delta d\mu = d\alpha + \delta\beta = \omega$

* pže $\delta\lambda = \alpha - d\varkappa - \varrho$, $d\mu = \beta - \delta\nu - \sigma$

navíc $d^2 = 0$, $\delta^2 = 0$, $d\varrho = 0$, $\delta\sigma = 0$

Věta: (ko)potenciály pro (ko)uzavřené * analogie (ko)Poinc. lemat, ale glob. (a bez topol. triv)

1) $d\omega = 0 \Rightarrow \exists \alpha, \varrho : \omega = d\alpha + \varrho \quad \Delta\varrho = 0$ lze $\delta\alpha = 0$

2) $\delta\omega = 0 \Rightarrow \exists \beta, \sigma : \omega = \delta\beta + \sigma \quad \Delta\sigma = 0$ lze $d\beta = 0$

důk: * jen pro 1) pž podobně

$\omega = d\alpha + \delta\beta + \varrho \quad d\beta = 0$ β nemá harm. č. * rozklad včetně kalibrace

* počítejme: * přidám nulu $d\beta = 0$

$$0 = d\omega = d\delta\beta = d\delta\beta + \delta d\beta = \Delta\beta \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \omega = d\alpha + \varrho$$

* $d^2 = 0$
$d\varrho = 0$ pž harm.

* pž β nemá mít harm. č.

* tvrzení říká:

(ko)uzavřená = (ko)exaktní + harmonika

* tzn. uzavřené se od exaktních liší o harmoniky,

to je základ ekvivalence de Rhamovy kohomologie a prostoru harmonik

DE RHAMOVA KOHOMOLOGIE

Def: ω je uzavřená $d\omega = 0$ $\quad \Omega^p_c M = Z^p M$ * kocykly

ω je exaktní $\omega = d\sigma$ $\quad \Omega^p_e M = B^p M$ * kohranice

} bude jasné příště

* ekvivalentně:

$ZM = \ker d \qquad BM = \operatorname{img} d$

* pro nehomogenní ZM a BM

* dodefinovávám $B^0 M \equiv \{0\}$ (exaktní fce jen 0)

* každá d-forma uzavřená ($\forall$ $(d+1)$-forma je 0)

* platí:

$BM \subset ZM$ * každá exaktní je uzavřená (nás zajímá rozdíl)

ZM je podalgebra ΩM * uzavřená vůči násobení

důk: $d\omega = 0 \quad d\sigma = 0 \Rightarrow d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma \pm \omega \wedge d\sigma = 0$

BM je ideál v ZM * násobení exaktní uzavřenou je exaktní

důk: $\omega = d\varkappa \quad d\sigma = 0 \Rightarrow \omega \wedge \sigma = d\varkappa \wedge \sigma = d(\varkappa \wedge \sigma)$

Def: de Rhamova kohomologická grupa

$$H^p_{dR}(M) = Z^p M / B^p M$$

$\Omega \in H^p_{dR}(M)$

$\Omega = [\omega] = \omega + B^p M$

* kohom. třída

* reprezentant $\omega \in Z^p M$

* třída ekviv.

tzn. $[\omega + d\alpha] = [\omega]$

* zavedu ekvivalenci forem až na exaktní

* de Rh. koh. g. je faktorizace uzavřených touto ekvivalencí = prostor tříd ekvivalence uzavř. lišících se o lib. exakt.

* prvky jsou třídy, které můžu psát pomocí reprezentanta ω (uzavř. forma) plus všech možných exaktních

* exaktní jsou ekvivalentní 0, tzn. $[d\sigma] = [0]$

pozn: $H^p_{dR}(M)$ je komutativní grupa $\Omega_1 + \Omega_2 = [\omega_1 + \omega_2]$

vektorový prostor $r\Omega = [r\omega]$ * konzistentní pře uzavření

$H_{dR}(M)$ je algebra $\Omega_1 \wedge \Omega_2 = [\omega_1 \wedge \omega_2]$

Věta: $H^p_{dR}(M) \cong \mathcal{H}^p_\Delta M$ * de Rh. kohom. g. je isomorfní prostoru harmonik

důk:

* def. [ ]

$\Omega \in H^p(M) \Rightarrow \Omega = [\omega],\ d\omega = 0 \Rightarrow \exists \rho \in \mathcal{H}^p_\Delta M : \Omega = [d\alpha + \rho] = [\rho]$

* z Věty na 8

* toto ρ je právě jedno:

$[\rho_1] = [\rho_2] \Rightarrow \rho_1 = \rho_2 + d\gamma \Rightarrow \rho_1 = \rho_2$

* def. [ ] * pže exaktní a harm. č. jsou na sebe kolmé musí nutně $d\gamma = 0$

* tzn. existuje jednozn. reprezentant $\Rightarrow$ prostory jsou isomorfní

Def: Bettiho číslo

$b^p(M) = \dim H^p_{dR}(M)$ * z předch. věty už víme, že je konečné

* Z^pM ; B^pM jsou ∞-dim, ale liší se jen o prostor konečn.-dim. (tzn. konečně parametrů)

* tento rozdíl charakterizuje topologickou netrivialitu M (na triv. M "rozumné" harmoniky nejsou tzn. platí Poinc. lemma, na netriviální se liší právě o počet nezávislých harmonik)

Def: Eulerova charakteristika

$$\chi(M) = \sum_{p=0}^{d} (-1)^p b^p(M)$$

* mnohostěn: χ = vrcholy − hrany + stěny

* sféra ~ konvexní mnohostěn $\chi = 2$

* netrivialitu topologie popíšeme homologií a ukážeme že je duální ke kohomologii (příště)

Věta: Poincarého dualita

$b^{d-p}(M) = b^p(M)$ * souvislost "nízko a vysoko-dim. děr"

důk:

$\mathcal{H}^{d-p}(M) = \mathcal{H}^p(M)$ * pže Hodge duál harmoniky je harmonika (jen se prohodí role v charakterizaci harmonik pomocí $d\gamma = 0$ $\delta\gamma = 0$)

pozn: $\dim H^0(M)$ = počet komponent M * furt předp. kompaktní M

$\Omega^0 M = \mathcal{F} M$ * 0-formy = fce

$\Delta f = 0 \iff df = 0 \quad \delta f = 0 \iff f = \text{konst.}$ * harmoniky jsou konst.

* triv. pže f je fce

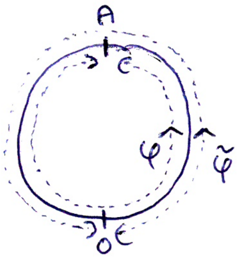
* na každé komp. však mohu mít jinou konstantu

$\mathcal{H}^0(M) = \operatorname{Lin}(1_1, 1_2, \dots, 1_K) \cong \mathbb{R}^K$ tj. $H^0(M) \cong \mathbb{R}^K$ tzn. $b^0(M) = K$

* lineární obal jedničky na každé komp.

* f = konst je uzavř., ale ne exaktní (pouze f=0 je exaktní)

Př: kohom. g. S^1



* zavedeme dvě souř. mapy

$\varphi \in (-\pi, \pi)$ * obě jsou globálně nespojité

$\tilde{\varphi} \in (0, 2\pi)$

* definujeme glob. hladkou 1-formu $\Phi \in \Omega^1 S^1$

$$\Phi := \begin{cases} d\varphi & \text{na } S^1 \setminus \{A\} \\ d\tilde{\varphi} & \text{na } S^1 \setminus \{0\} \end{cases}$$

* můžeme zavést metriku a Levi-Civ. tenz. (globálně)

$g = \Phi\,\Phi \qquad \varepsilon = \Phi$

* platí:

$b^0(S^1) = 1 \quad H^0(S^1) \cong \mathbb{R}$ generováno $[1]$ * jedna komponenta

$b^1(S^1) = 1 \quad H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$ generováno $[\underbrace{\Phi}_{=\varepsilon}]$ * Φ je uzavřená, ale ne exaktní ($\varphi, \tilde{\varphi}$ nejsou glob. hladké)

* $b^0(S^1) = b^1(S^1)$ plyne taky z Poincarého duality

* Φ je harmonika

$\Delta \Phi = 0$ * pže $d\Phi = 0$ a $\delta \Phi = -{*}d\underbrace{{*}\Phi}_{={*}\varepsilon = 1} = 0$

* obecné harmoniky $\mathcal{H}^1(S^1)$

$\omega \in \Omega^1 S^1 \quad \omega = \omega_\varphi \Phi$ * násobek φ-period. fce ω_φ

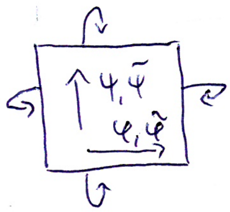
$\Delta \omega = (\Delta \omega_\varphi)\Phi$ * pže $\nabla \Phi = 0$ a $\Delta = -\nabla^2$ $(R = 0)$

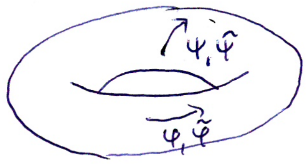
$\Delta \omega = 0 \iff \Delta \omega_\varphi = 0 \iff \omega_\varphi = \text{konst.}$ * pže. harm. fce musí být konst.

$\mathcal{H}^1(S^1) = \operatorname{Lin}(\Phi) \cong \mathbb{R}$ * pouze konst. násobek Φ

Př kohom. g. T^2

* zavedeme dvě souř. mapy φ, ψ / $\tilde\varphi, \tilde\psi$ * opět nejsou globálně spojité
* T^2 je identifikace stran čtverce





* definujeme dvě nezávislé glob. hladké 1-formy $\Phi, \Psi \in \Omega^1 T^2$

$$\Phi = \begin{cases} d\varphi \\ d\tilde\varphi \end{cases} \qquad \Psi = \begin{cases} d\psi \\ d\tilde\psi \end{cases}$$

* jsou nezávislé – tvoří bázi

* opět můžeme zavést plochou metriku a Levi-Civ. tenz. (globálně)

$$g = \Phi\Phi + \Psi\Psi \qquad \varepsilon = \Phi \wedge \Psi$$

* platí:

$b^0(T^2) = 1$ $\quad H^0(T^2) \cong \mathbb{R}$ generováno $[1]$ * jedna komp.

$b^1(T^2) = 2$ $\quad H^1(T^2) \cong \mathbb{R}^2$ generováno $[\Phi], [\Psi]$ * Φ, Ψ uzavř. ale ~~ne~~ exaktní

$b^2(T^2) = 1$ $\quad H^2(T^2) \cong \mathbb{R}$ generováno $\underbrace{[\Phi\wedge\Psi]}_{=\varepsilon}$ * $\Phi\wedge\Psi$ uzavřené ale ne exaktní

* Φ a Ψ jsou harmoniky

$$\Delta\Phi = 0 \qquad \Delta\Psi = 0$$

* neboť $d\Phi = d\Psi = 0$, $\delta\Phi = *d\underbrace{*\Phi}_{\Psi} = 0$, $\delta\Psi = *d\underbrace{*\Psi}_{-\Phi} = 0$

* ε je harmonika

$$\Delta\varepsilon = 0$$

* neboť $\varepsilon = *1$ a duál harmoniky je harmonika

* obecné harmoniky $\mathcal{H}^1(T^2)$

$\omega \in \Omega^1 T^2$ $\quad \omega = \omega_\varphi \Phi + \omega_\psi \Psi$ * lin. komb. φ,ψ-periodd. fcí $\omega_\varphi, \omega_\psi$

$\Delta\omega = (\Delta\omega_\varphi)\Phi + (\Delta\omega_\psi \Psi)$ * neboť $\nabla\Phi = \nabla\Psi = 0$ a $\Delta = -\nabla^2$ $(R=0)$

$\Delta\omega = 0 \iff \Delta\omega_\varphi = \Delta\omega_\psi = 0 \iff \omega_\varphi = \text{konst}$ $\quad \omega_\psi = \text{konst}$

* harmonické fce musí být konstanty

$\mathcal{H}^1(T^2) = \mathrm{Lin}(\Phi, \Psi) \cong \mathbb{R}^2$

* obecné harmoniky $\mathcal{H}^2(T^2)$

$\omega \in \Omega^2 T^2$ $\quad \omega = \omega_{\varphi\psi}\,\varepsilon$

$\Delta\omega = (\Delta\omega_{\varphi\psi})\,\varepsilon$ * neboť $\nabla\varepsilon = 0$

$\Delta\omega = 0 \iff \Delta\omega_{\varphi\psi} = 0 \iff \omega_{\varphi\psi} = \text{konst.}$ * harm. fce musí být konst.

$\mathcal{H}^2(T^2) = \mathrm{Lin}(\varepsilon) \cong \mathbb{R}$

Př: kohom. g. S^n

$b^0(S^n) = 1 = b^n(S^n)$

$b^p(S^n) = 0 \quad p \neq 0, n$

* S^n má pouze díru max. dimenze = koule uvnitř sféry
* lze použít jako prototyp na testy přítomnosti děr dané dimenze vnořením sféry (dané dimenze) do zkoumaného prostoru (homologie: sféry → simplexy)