Jazyk fundamentálních teorií:

akce a geometrizace

Pavel Krtouš

Princip extremální akce

- teleologický vs. lokální popis
- fyzikální teorie jako stavebnice

Geometrizace

- lokalita
- gravitace – geometrie prostoročasu
- kalibrační pole – geometrie vnitřních stupňů volnosti

Princip akce z kvantové mechaniky

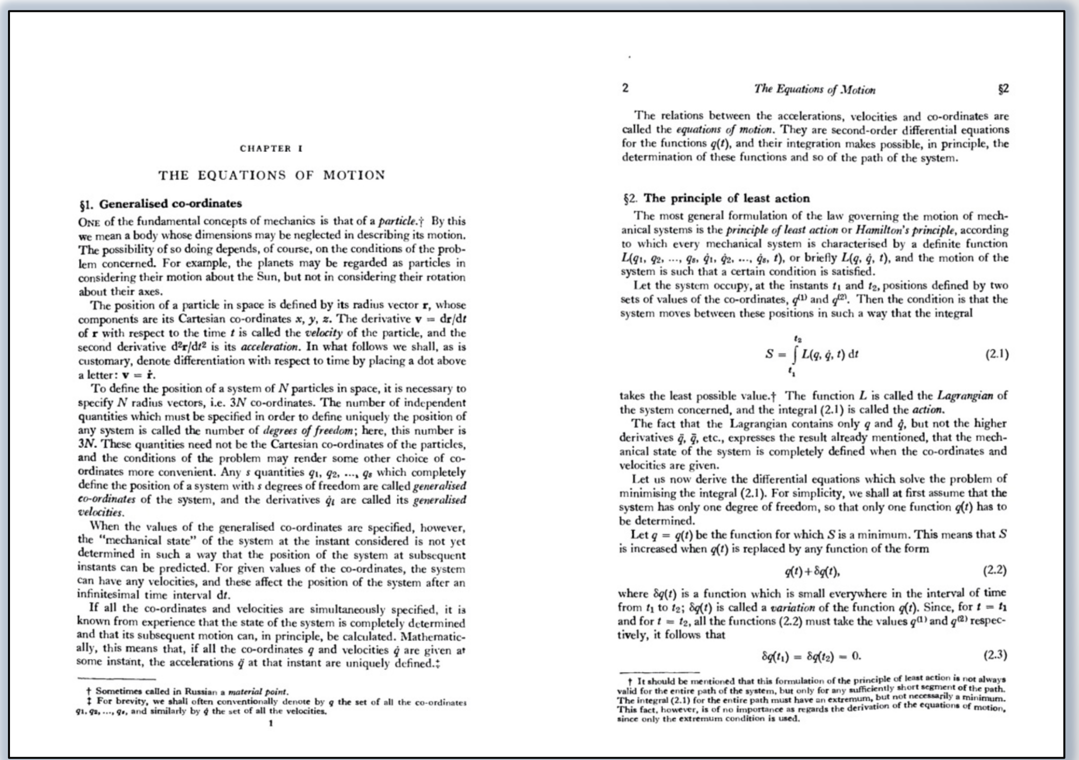
- pravděpodobnosti a amplitudy
- princip extremální akce z kvantové mechaniky

Princip extremální akce

- ***kauzální popis***
  pohybový stav nyní určuje pohybový stav v příštím okamžiku

- ***teleologický popis***
  vývoj systému musí splňovat kritérium optimality

L. D. Landau, E. M. Lifshitz: *Mechanics*



CHAPTER I

THE EQUATIONS OF MOTION

§1. Generalised co-ordinates

ONE of the fundamental concepts of mechanics is that of a *particle*.† By this we mean a body whose dimensions may be neglected in describing its motion. The possibility of so doing depends, of course, on the conditions of the problem concerned. For example, the planets may be regarded as particles in considering their motion about the Sun, but not in considering their rotation about their axes.

The position of a particle in space is defined by its radius vector $\mathbf{r}$, whose components are its Cartesian co-ordinates x, y, z. The derivative $\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ of $\mathbf{r}$ with respect to the time t is called the *velocity* of the particle, and the second derivative $\mathrm{d}^2\mathbf{r}/\mathrm{d}t^2$ is its *acceleration*. In what follows we shall, as is customary, denote differentiation with respect to time by placing a dot above a letter: $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$.

To define the position of a system of N particles in space, it is necessary to specify N radius vectors, i.e. $3N$ co-ordinates. The number of independent quantities which must be specified in order to define uniquely the position of any system is called the number of *degrees of freedom*; here, this number is $3N$. These quantities need not be the Cartesian co-ordinates of the particles, and the conditions of the problem may render some other choice of co-ordinates more convenient. Any s quantities $q_1, q_2, \ldots, q_s$ which completely define the position of a system with s degrees of freedom are called *generalised co-ordinates* of the system, and the derivatives $\dot{q}_i$ are called its *generalised velocities*.

When the values of the generalised co-ordinates are specified, however, the "mechanical state" of the system at the instant considered is not yet determined in such a way that the position of the system at subsequent instants can be predicted. For given values of the co-ordinates, the system can have any velocities, and these affect the position of the system after an infinitesimal time interval $\mathrm{d}t$.

If all the co-ordinates and velocities are simultaneously specified, it is known from experience that the state of the system is completely determined and that its subsequent motion can, in principle, be calculated. Mathematically, this means that, if all the co-ordinates q and velocities $\dot{q}$ are given at some instant, the accelerations $\ddot{q}$ at that instant are uniquely defined.‡

† Sometimes called in Russian a *material point*.

‡ For brevity, we shall often conventionally denote by q the set of all the co-ordinates $q_1, q_2, \ldots, q_s$, and similarly by $\dot{q}$ the set of all the velocities.

1

2 *The Equations of Motion* §2

The relations between the accelerations, velocities and co-ordinates are called the *equations of motion*. They are second-order differential equations for the functions $q(t)$, and their integration makes possible, in principle, the determination of these functions and so of the path of the system.

§2. The principle of least action

The most general formulation of the law governing the motion of mechanical systems is the *principle of least action* or *Hamilton's principle*, according to which every mechanical system is characterised by a definite function $L(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, t)$, or briefly $L(q, \dot{q}, t)$, and the motion of the system is such that a certain condition is satisfied.

Let the system occupy, at the instants t_1 and t_2, positions defined by two sets of values of the co-ordinates, $q^{(1)}$ and $q^{(2)}$. Then the condition is that the system moves between these positions in such a way that the integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, \mathrm{d}t \qquad (2.1)$$

takes the least possible value.† The function L is called the *Lagrangian* of the system concerned, and the integral (2.1) is called the *action*.

The fact that the Lagrangian contains only q and $\dot{q}$, but not the higher derivatives $\ddot{q}$, $\dddot{q}$, etc., expresses the result already mentioned, that the mechanical state of the system is completely defined when the co-ordinates and velocities are given.

Let us now derive the differential equations which solve the problem of minimising the integral (2.1). For simplicity, we shall at first assume that the system has only one degree of freedom, so that only one function $q(t)$ has to be determined.

Let $q = q(t)$ be the function for which S is a minimum. This means that S is increased when $q(t)$ is replaced by any function of the form

$$q(t) + \delta q(t), \qquad (2.2)$$

where $\delta q(t)$ is a function which is small everywhere in the interval of time from t_1 to t_2; $\delta q(t)$ is called a *variation* of the function $q(t)$. Since, for $t = t_1$ and for $t = t_2$, all the functions (2.2) must take the values $q^{(1)}$ and $q^{(2)}$ respectively, it follows that

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \qquad (2.3)$$

† It should be mentioned that this formulation of the principle of least action is not always valid for the entire path of the system, but only for any sufficiently short segment of the path. The integral (2.1) for the entire path must have an extremum, but not necessarily a minimum. This fact, however, is of no importance as regards the derivation of the equations of motion, since only the extremum condition is used.

Akce

$$S[x] = \int_{t_Z}^{t_K} L\big(x(t), \dot{x}(t)\big)dt$$

Lagrangián

$$L(x, v)$$

rychlost

poloha

pohybový stav je určen polohou a rychlostí

Akce

$$S[x] = \int_{t_Z}^{t_K} L\big(x(t), \dot{x}(t)\big) dt$$

Lagrangián

$$L(x, v)$$

rychlost

poloha

pohybový stav je určen polohou a rychlostí

nerelativistická fyzika: typicky rozdíl kinetické a potenciální energie

$$L = K - V$$

Akce

$$S[x] = \int_{t_Z}^{t_K} L\big(x(t), \dot{x}(t)\big) dt$$

Klasické trajektorie

akce se nemění při malých změnách trajektorie

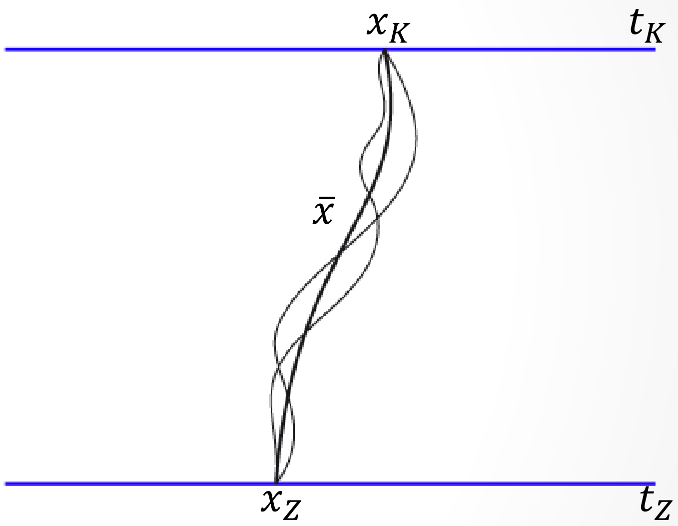
$$\delta S[\bar{x}] = 0$$

při fixovaném začátku a konci

$$x(t_Z) = x_Z \qquad\qquad x(t_K) = x_K$$

Pohybové rovnice

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}(\bar{x}, \dot{\bar{x}})\right) - \frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}) = 0$$



Skládání systémů

$$\underbrace{S_{X+Y}[x,y] = S_X[x] + S_Y[y]}_{\text{pro nezávislé systémy}} + S_{\mathrm{int}}[x,y]$$

Skládání trajektorií

$$S[x \odot y] = S[x] + S[y]$$

pro navazující trajektorie

Zákony zachování

$$L(x, v) = L(x^1, x^2, x^3, \dots, v^1, v^2, v^3, \dots)$$

nezávislost Lagrangiánu na jedné proměnné x^k

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^k}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial v^k} = \text{konst.}$$

symetrie $\Leftrightarrow$ **zákony zachování**

Geometrizace

- ***prostoročas***
  jeviště fyzikálních jevů

- ***lokalita***
  interakce probíhají lokálně v prostoročasu

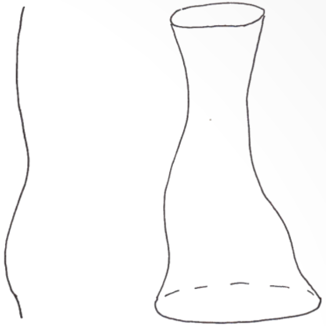
- ***geometrické objekty vs. polní popis***
  částice, struny, brány, …
  rozprostraněná pole
  geometrie prostoročasu

- ***vnitřní stupně volnosti***
  geometrie neprostoročasových stupňů volnosti

Geometrické objekty

částice = křivka v prostoročasu
struna = plocha v prostoročase
brána = časový vývoj D-dim objektu v čase

lokální interakce = interakce pouze na geometrickém průniku objektů



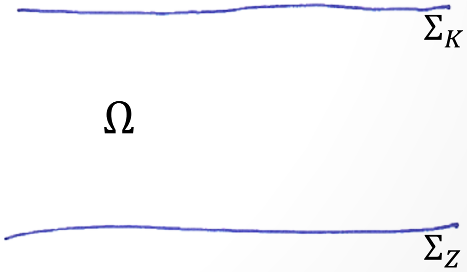
Polní popis

pole = veličina rozprostraněná v prostoročase

$\phi(x) \qquad \vec{A}(x) \qquad \overleftrightarrow{H}(x)$

lokální interakce = akce je lokální funkcionál pole

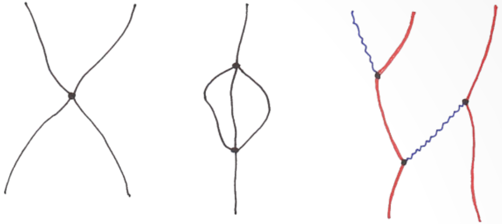
$$S[\phi] = \int_\Omega \mathcal{L}\big(\phi(x), D\phi(x)\big)\, dx$$



Geometrické objekty

částice = křivka v prostoročasu
struna = plocha v prostoročase
brána = časový vývoj D-dim objektu v čase

lokální interakce = interakce pouze na geometrickém průniku objektů



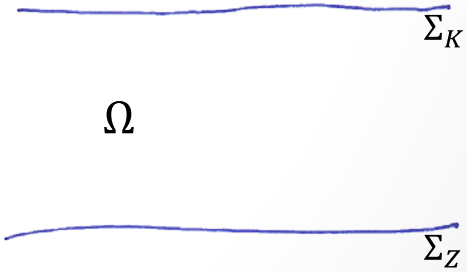
Polní popis

pole = veličina rozprostraněná v prostoročase

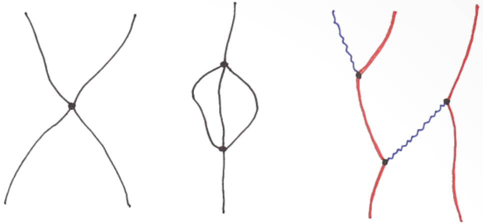
$$\phi(x) \qquad \vec{A}(x) \qquad \overleftrightarrow{H}(x)$$

lokální interakce = akce je lokální funkcionál pole

$$S[\phi] = \int_\Omega \mathcal{L}\big(\phi(x), D\phi(x)\big)\, dx$$

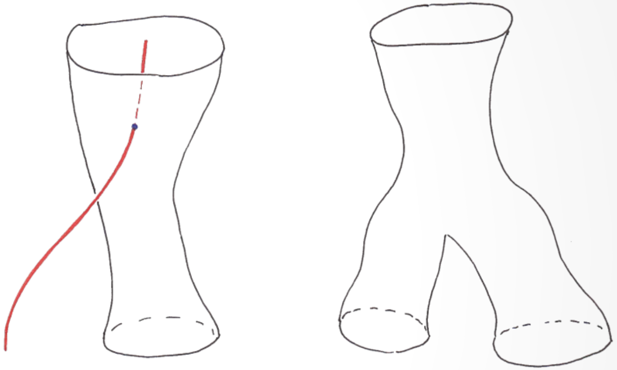


Geometrické objekty



částice = křivka v prostoročasu
struna = plocha v prostoročase
brána = časový vývoj D-dim objektu v čase

lokální interakce = interakce pouze na geometrickém průniku objektů



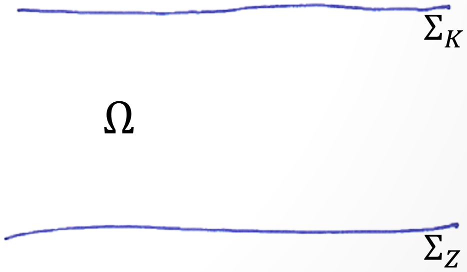
Polní popis

pole = veličina rozprostraněná v prostoročase

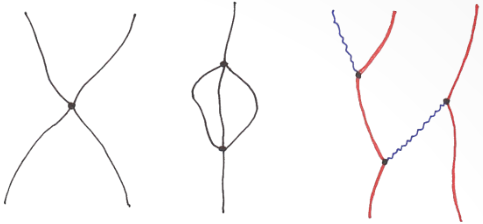
$$\phi(x) \qquad \vec{A}(x) \qquad \overleftrightarrow{H}(x)$$

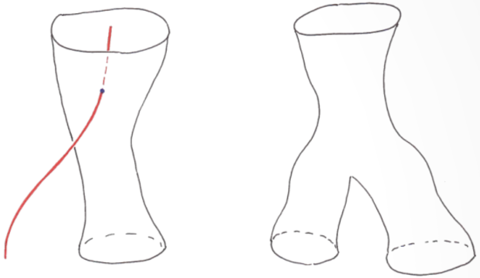
lokální interakce = akce je lokální funkcionál pole

$$S[\phi] = \int_\Omega \mathcal{L}\big(\phi(x), D\phi(x)\big)\, dx$$



Geometrické objekty





částice = křivka v prostoročasu
struna = plocha v prostoročase
brána = časový vývoj D-dim objektu v čase

lokální interakce = interakce pouze na geometrickém průniku objektů

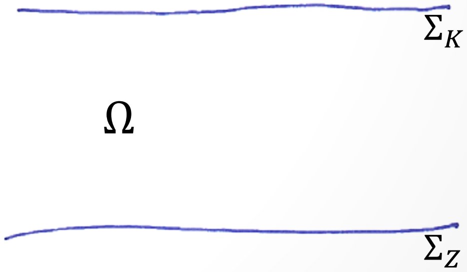
Polní popis

pole = veličina rozprostraněná v prostoročase

$$\phi(x) \qquad \vec{A}(x) \qquad \overleftrightarrow{H}(x)$$

lokální interakce = akce je lokální funkcionál pole

$$S[\phi] = \int_\Omega \mathcal{L}\big(\phi(x), D\phi(x)\big)\, dx$$



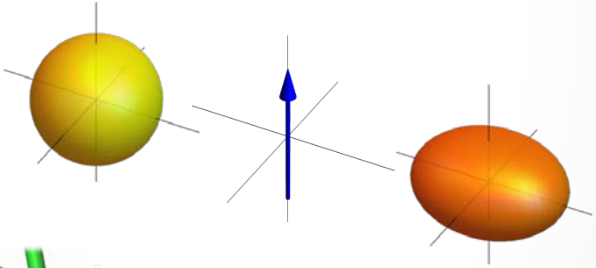
Prostoročasová struktura objektů

tvar objektu	=	chování vůči rotacím
prostoročasová struktura	=	chování vůči lokálním Lorentzovým transformacím

chování vůči transformacím	=	reprezentace grupy transformací

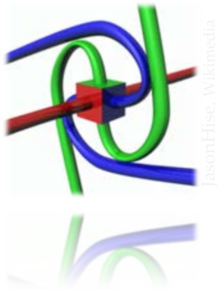
celočíselný spin (bosony):

- ϕ skalár
- $\vec{A}$ vektor
- $\overleftrightarrow{M}$ symetrický tenzor



poločíselný spin (fermiony):

- ψ spinor



Příklady akcí

částice

$$S_{\text{částice}}[w] = -m \int_I d\tau + q \int_I \phi(w) d\tau + e \int_I u \cdot A(w) d\tau$$

$d\tau$ – vlastní čas = délka světočáry
u – čtyřrychlost = tečný vektor ke světočáře

struna

$$S_{\text{struna}}[\sigma] = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma$$

$d\sigma$ – plošný element na světoploše struny

Příklady akcí

Skalární pole (Higgsův boson)

$$S_{\mathrm{SP}}[\phi] = -\int_\Omega \left[\frac{\alpha}{2} \nabla\phi \cdot g \cdot \nabla\phi + V(\phi)\right] d\Omega$$

$$V(\phi) = J\phi + \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

Elektromagnetické pole

$$S_{\mathrm{EM}}[A] = -\frac{\varepsilon_o}{4}\int_\Omega F^2\, d\Omega$$

$$F = \mathrm{d}A$$

Příklady akcí

Skalární pole (Higgsův boson)

$$S_{\mathrm{SP}}[\phi] = -\int_{\Omega} \left[\frac{\alpha}{2} \nabla\phi \cdot g \cdot \nabla\phi + V(\phi)\right] d\Omega$$

$$V(\phi) = J\phi + \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

Elektromagnetické pole

$$S_{\mathrm{EM}}[A] = -\frac{\varepsilon_o}{4}\int_{\Omega} F_{ab}F_{cd}g^{ac}g^{bd}\, d\Omega$$

$$F = \mathrm{d}A$$

Příklady akcí

Skalární pole (Higgsův boson)

$$S_{\mathrm{SP}}[\phi] = -\int_{\Omega} \left[\frac{\alpha}{2} \nabla\phi \cdot g \cdot \nabla\phi + V(\phi)\right] d\Omega$$

$$V(\phi) = J\phi + \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

Elektromagnetické pole

$$S_{\mathrm{EM}}[A] = -\frac{\varepsilon_o}{4}\int_{\Omega} F_{ab}F_{cd}g^{ac}g^{bd}\, d\Omega$$

$$F = \mathrm{d}A$$

$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot F = \frac{1}{\varepsilon_o} J$$

$$J = \frac{\delta S_{\text{ostatní}}}{\delta A}$$

$$F = \mathrm{d}A \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}F = 0$$

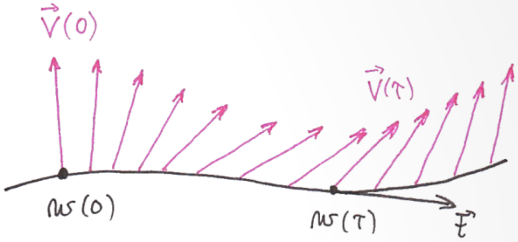
Maxwellovy rovnice

Gravitace

geometrie

- gravitace = geometrie prostoročasu
- geometrie popsána prostoročasovou metrikou g

derivování ∇



- derivování = porovnávání veličin v blízkých bodech
- nulová derivace = veličina se nemění
- derivace umožňuje „rovnoběžně“ přenášet veličiny podél křivky
- kompatibilita s metrikou jednoznačně určuje derivaci ∇
- kompatibilita = metrika se nemění: $\nabla g = 0$

křivost geometrie

- rovnoběžný přenos po smyčce nemusí být triviální
- netriviálnost rovnoběžného přenosu = křivost
- křivost popsána Riemannovým tenzorem R_{abcd}
- Riemannův tenzor určuje skalární křivost R a Einsteinův tenzor Ein_{ab}

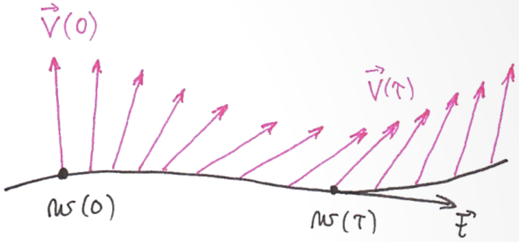
Gravitace

geometrie

- gravitace = geometrie prostoročasu
- geometrie popsána prostoročasovou metrikou g

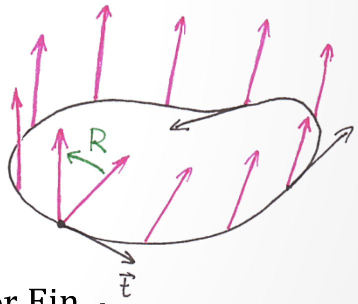
derivování ∇

- derivování = porovnávání veličin v blízkých bodech
- nulová derivace = veličina se nemění
- derivace umožňuje „rovnoběžně“ přenášet veličiny podél křivky
- kompatibilita s metrikou jednoznačně určuje derivaci ∇
- kompatibilita = metrika se nemění: $\nabla g = 0$



křivost geometrie

- rovnoběžný přenos po smyčce nemusí být triviální
- netriviálnost rovnoběžného přenosu = křivost
- křivost popsána Riemannovým tenzorem R_{abcd}
- Riemannův tenzor určuje skalární křivost R a Einsteinův tenzor Ein_{ab}



Gravitace

Einstein–Hilbertova akce

$$S_{\mathrm{EH}}[g] = \frac{1}{2\kappa}\int_{\Omega} (R - 2\Lambda)\, d\Omega \qquad\qquad S = S_{\mathrm{EH}}[g] + S_{\mathrm{ostatní}}[\phi, A, \dots, g]$$

Einsteinův gravitační zákon

$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ein} + \Lambda\, g = \kappa\, T \qquad\qquad T \propto \frac{\delta S_{\mathrm{ostatní}}}{\delta g}$$

Gravitace

Einstein–Hilbertova akce

$$S_{\mathrm{EH}}[g] = \frac{1}{2\kappa}\int_{\Omega}(R - 2\Lambda)\, d\Omega \qquad S = S_{\mathrm{EH}}[g] + S_{\text{ostatní}}[\phi, A, \dots, g]$$

Einsteinův gravitační zákon

$$S_{\mathrm{SP}}[\phi] = -\int_{\Omega}\left[\frac{\alpha}{2}\nabla\phi \cdot g \cdot \nabla\phi + V(\phi)\right] d\Omega$$

$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ein} + \Lambda\, g = \kappa\, T \qquad T \propto \frac{\delta S_{\text{ostatní}}}{\delta g}$$

skalární pole: $$T_{\mathrm{SP}} = \alpha\, \nabla\phi\, \nabla\phi - \left(\frac{\alpha}{2}\nabla\phi \cdot g \cdot \nabla\phi + V(\phi)\right) g$$

Gravitace

Einstein–Hilbertova akce

$$S_{\mathrm{EH}}[g] = \frac{1}{2\kappa}\int_\Omega (R - 2\Lambda)\, d\Omega \qquad\qquad S = S_{\mathrm{EH}}[g] + S_{\text{ostatní}}[\phi, A, \dots, g]$$

Einsteinův gravitační zákon

$$S_{\mathrm{EM}}[A] = -\frac{\varepsilon_o}{4}\int_\Omega F_{ab}F_{cd}g^{ac}g^{bd}\, d\Omega$$

$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ein} + \Lambda\, g = \kappa\, T \qquad\qquad T \propto \frac{\delta S_{\text{ostatní}}}{\delta g}$$

skalární pole: $T_{\mathrm{SP}} = \alpha\, \nabla\phi\, \nabla\phi - \left(\frac{\alpha}{2}\nabla\phi \cdot g \cdot \nabla\phi + V(\phi)\right) g$

elektromagnetické pole: $T_{\mathrm{EM}} = \varepsilon_o \left(-F \cdot g \cdot F - \frac{1}{4}F^2 g\right)$

Gravitace

Einstein–Hilbertova akce

$$S_{\mathrm{EH}}[g] = \frac{1}{2\kappa}\int_{\Omega}(R - 2\Lambda)\, d\Omega \qquad\qquad S = S_{\mathrm{EH}}[g] + S_{\mathrm{ostatní}}[\phi, A, \dots, g]$$

Einsteinův gravitační zákon

$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ein} + \Lambda\, g = \kappa\, T \qquad\qquad T \propto \frac{\delta S_{\mathrm{ostatní}}}{\delta g}$$

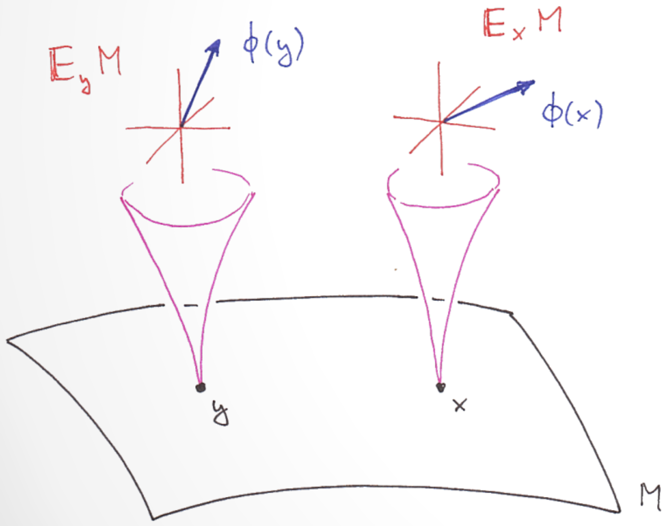
skalární pole: $T_{\mathrm{SP}} = \alpha\, \nabla\phi\, \nabla\phi - \left(\frac{\alpha}{2}\nabla\phi \cdot g \cdot \nabla\phi + V(\phi)\right) g$

elektromagnetické pole: $T_{\mathrm{EM}} = \varepsilon_o\left(-F \cdot g \cdot F - \frac{1}{4}F^2 g\right)$

Vnitřní stupně volnosti (Yang-Millsova teorie)

látková pole

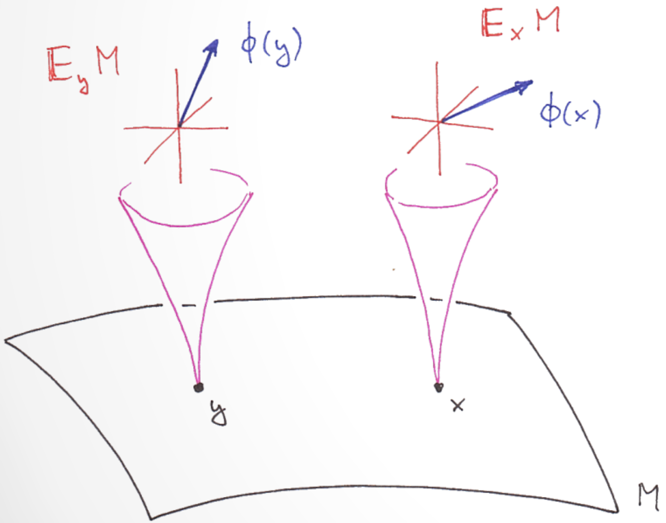
- pole mohou nabývat hodnot v prostorech nezávislých na prostoročase
- tzv. vnitřní stupně volnosti – náboje, vůně, barvy, …
- lokalita $\Rightarrow$ v každém prostoročasovém bodě nezávislý vnitřní prostor

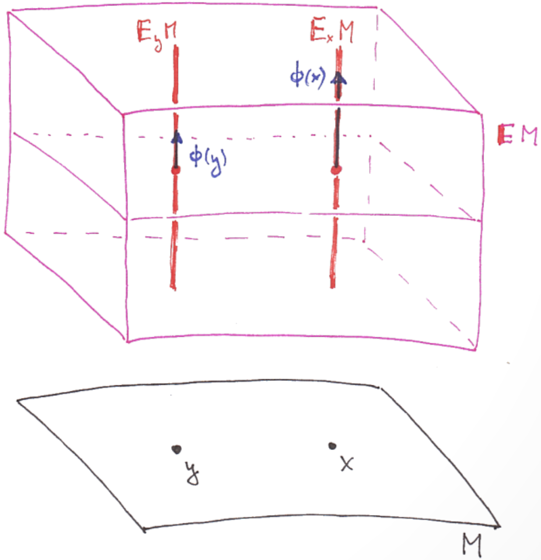


Vnitřní stupně volnosti (Yang-Millsova teorie)

látková pole

- pole mohou nabývat hodnot v prostorech nezávislých na prostoročase
- tzv. vnitřní stupně volnosti – náboje, vůně, barvy, …
- lokalita $\Rightarrow$ v každém prostoročasovém bodě nezávislý vnitřní prostor

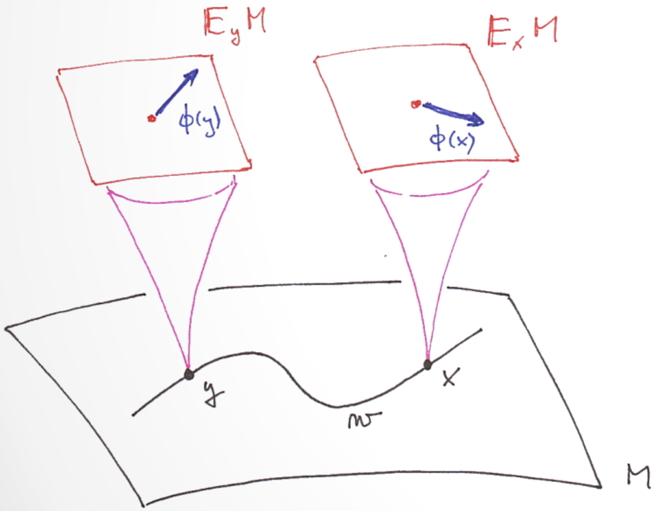




Vnitřní stupně volnosti (Yang-Millsova teorie)

látková pole

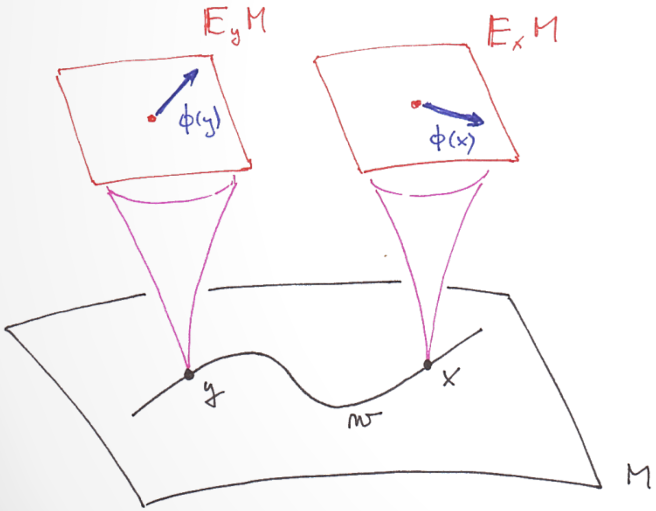
- pole mohou nabývat hodnot v prostorech nezávislých na prostoročase
- tzv. vnitřní stupně volnosti – náboje, vůně, barvy, …
- lokalita ⇒ v každém prostoročasovém bodě nezávislý vnitřní prostor

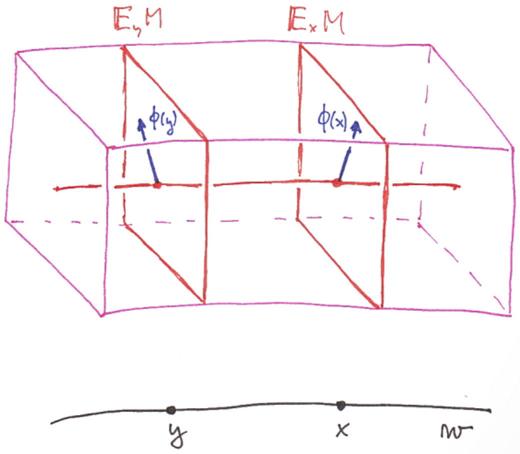


Vnitřní stupně volnosti (Yang-Millsova teorie)

látková pole

- pole mohou nabývat hodnot v prostorech nezávislých na prostoročase
- tzv. vnitřní stupně volnosti – náboje, vůně, barvy, …
- lokalita ⇒ v každém prostoročasovém bodě nezávislý vnitřní prostor





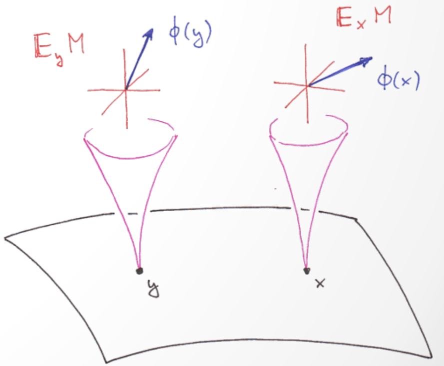
Vnitřní stupně volnosti a kalibrační symetrie

látková pole

- pole mohou nabývat hodnot v prostorech nezávislých na prostoročase
- tzv. vnitřní stupně volnosti – náboje, vůně, barvy, …
- lokalita $\Rightarrow$ v každém prostoročasovém bodě nezávislý vnitřní prostor

kalibrační symetrie

- vnitřní prostor přímo nepozorovatelný
- dostupné pouze skaláry získané pomocí kinematické struktury
- kinematická struktura – např. skalární součin
- kalibrační transformace = transformace zachovávající kinematickou strukturu
- kalibrační transformace jsou symetrie teorie
- nic měřitelného nesmí záviset na kalibrační transformaci



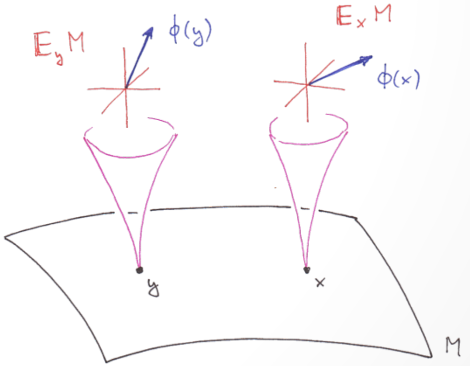
Vnitřní stupně volnosti a kalibrační symetrie

kalibrační symetrie

- vnitřní prostor přímo nepozorovatelný
- dostupné pouze skaláry získané pomocí kinematické struktury
- kinematická struktura – např. skalární součin
- kalibrační transformace = transformace zachovávající kinematickou strukturu
- kalibrační transformace jsou symetrie teorie
- nic měřitelného nesmí záviset na kalibrační transformaci

kalibrační grupa

- grupa kalibračních transformací
- „rotace“ zachovávající skalární součin



Vnitřní stupně volnosti a kalibrační symetrie

kalibrační symetrie

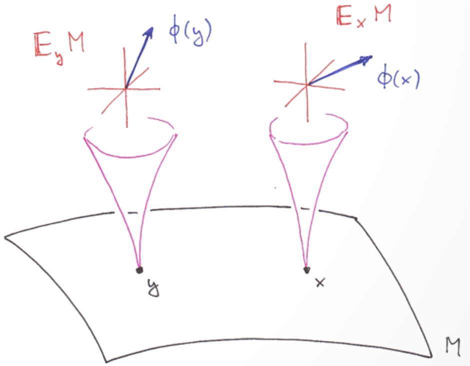
- vnitřní prostor přímo nepozorovatelný
- dostupné pouze skaláry získané pomocí kinematické struktury
- kinematická struktura – např. skalární součin
- kalibrační transformace = transformace zachovávající kinematickou strukturu
- kalibrační transformace jsou symetrie teorie
- nic měřitelného nesmí záviset na kalibrační transformaci

kalibrační grupa

- grupa kalibračních transformací
- „rotace" zachovávající skalární součin

příklady:

vnitřní prostor:	$\dim \boldsymbol{E} = 3\mathbb{R}$
kin. struktura:	$\mathbb{R}$-skalární součin
kalibr. symetrie:	rotace
kalibrační grupa:	$SO(3)$
počet generátorů:	3
teorie:	



Vnitřní stupně volnosti a kalibrační symetrie

kalibrační symetrie

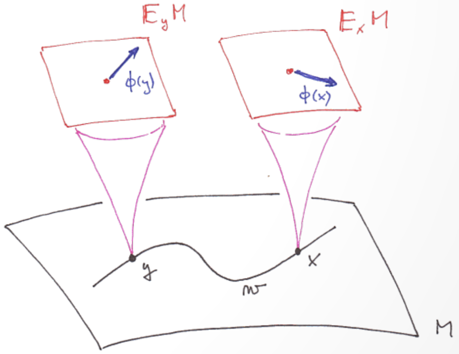
- vnitřní prostor přímo nepozorovatelný
- dostupné pouze skaláry získané pomocí kinematické struktury
- kinematická struktura – např. skalární součin
- kalibrační transformace = transformace zachovávající kinematickou strukturu
- kalibrační transformace jsou symetrie teorie
- nic měřitelného nesmí záviset na kalibrační transformaci

kalibrační grupa

- grupa kalibračních transformací
- „rotace“ zachovávající skalární součin

příklady:

vnitřní prostor:	dim $\boldsymbol{E} = 3\mathbb{R}$	dim $\boldsymbol{E} = 1\mathbb{C} = 2\mathbb{R}$
kin. struktura:	$\mathbb{R}$-skalární součin	$\mathbb{C}$-skalární součin
kalibr. symetrie:	rotace	unitární transf.
kalibrační grupa:	$SO(3)$	$U(1) = SO(2)$
počet generátorů:	3	1
teorie:		elektromagnetismus



Vnitřní stupně volnosti a kalibrační symetrie

kalibrační symetrie

- vnitřní prostor přímo nepozorovatelný
- dostupné pouze skaláry získané pomocí kinematické struktury
- kinematická struktura – např. skalární součin
- kalibrační transformace = transformace zachovávající kinematickou strukturu
- kalibrační transformace jsou symetrie teorie
- nic měřitelného nesmí záviset na kalibrační transformaci

kalibrační grupa

- grupa kalibračních transformací
- „rotace“ zachovávající skalární součin

příklady:

vnitřní prostor:	$\dim \boldsymbol{E} = 3\mathbb{R}$	$\dim \boldsymbol{E} = 1\mathbb{C} = 2\mathbb{R}$	$\dim \boldsymbol{E} = 2\mathbb{C}$
kin. struktura:	$\mathbb{R}$-skalární součin	$\mathbb{C}$-skalární součin	$\mathbb{C}$-skalární součin
kalibr. symetrie:	rotace	unitární transf.	unitární transf.
kalibrační grupa:	$SO(3)$	$U(1) = SO(2)$	$SU(2)$
počet generátorů:	3	1	3
teorie:		elektromagnetismus	slabá interakce

Vnitřní stupně volnosti a kalibrační symetrie

kalibrační symetrie

- vnitřní prostor přímo nepozorovatelný
- dostupné pouze skaláry získané pomocí kinematické struktury
- kinematická struktura – např. skalární součin
- kalibrační transformace = transformace zachovávající kinematickou strukturu
- kalibrační transformace jsou symetrie teorie
- nic měřitelného nesmí záviset na kalibrační transformaci

kalibrační grupa

- grupa kalibračních transformací
- „rotace“ zachovávající skalární součin

příklady:

vnitřní prostor:	$\dim \boldsymbol{E} = 3\mathbb{R}$	$\dim \boldsymbol{E} = 1\mathbb{C} = 2\mathbb{R}$	$\dim \boldsymbol{E} = 2\mathbb{C}$	$\dim \boldsymbol{E} = 3\mathbb{C}$
kin. struktura:	$\mathbb{R}$-skalární součin	$\mathbb{C}$-skalární součin	$\mathbb{C}$-skalární součin	$\mathbb{C}$-skalární součin
kalibr. symetrie:	rotace	unitární transf.	unitární transf.	unitární transf.
kalibrační grupa:	$SO(3)$	$U(1) = SO(2)$	$SU(2)$	$SU(3)$
počet generátorů:	3	1	3	8
teorie:		elektromagnetismus	slabá interakce	silná interakce

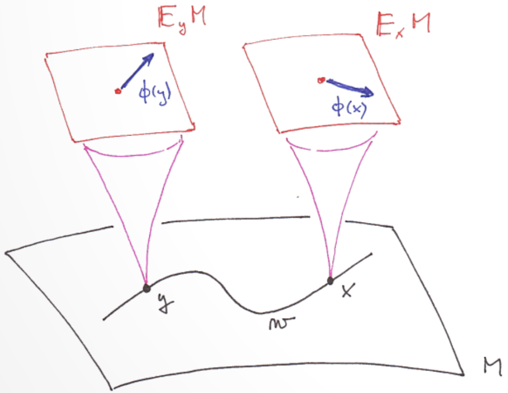
Látková a interakční pole (Yang-Millsova teorie)

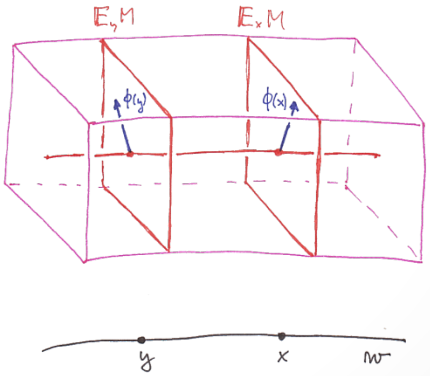
látková pole (leptony, kvarky, Higgs)

- pole nabývající hodnot v vnitřních prostorech

derivování *D*

- k sestrojení akce látkových polí potřeba derivace
- kompatibilita s kinematickou strukturou neurčuje jednoznačně derivaci *D*
- kompatibilita s kinematickou strukturou = kompatibilita s kalibrační symetrií
- existuje mnoho kalibračně kompatibilních derivací *D*





Látková a interakční pole (Yang-Millsova teorie)

látková pole (leptony, kvarky, Higgs)

- pole nabývající hodnot v vnitřních prostorech

derivování *D*

- k sestrojení akce látkových polí potřeba derivace
- kompatibilita s kinematickou strukturou neurčuje jednoznačně derivaci *D*
- kompatibilita s kinematickou strukturou = kompatibilita s kalibrační symetrií
- existuje mnoho kalibračně kompatibilních derivací *D*

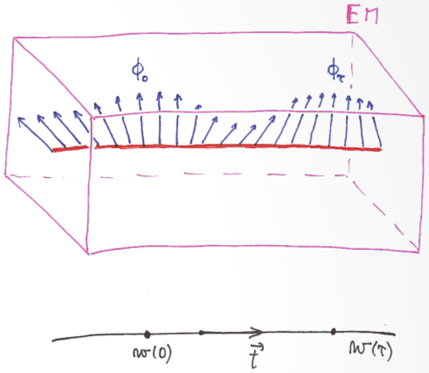
interakční [intermediální, kalibrační, gauge] pole (foton, gluony, Z a $W^{\pm}$ bosony)

- interakční pole = kalibračně kompatibilní derivace *D*

Interakční pole

derivování D

- derivování = porovnávání veličin z blízkých vnitřních prostorů
- nulová derivace = veličina se nemění
- derivace definuje rovnoběžný přenos podél křivky
- kompatibilita s kinematickou strukturou
  = zachovávání úhlů a velikostí při rovnoběžném přenosu
- kompatibilita s kalibrační symetrií
  = rovnoběžný přenos podél smyčky je kalibrační transformace



popis vůči bázi

- volba báze v každém vnitřním prostoru
- definuje souřadnicové derivování ∂
- D-rovnoběžný přenos se liší od souřadnicového ∂-přenosu kalibrační transformací

D-rovnoběžný přenos:	$\phi \longrightarrow U\phi$	$D_{\vec{t}}\, U\phi = 0$
∂-rovnoběžný přenos:	$\phi \longrightarrow u\phi$	$\partial_{\vec{t}}\, u\phi = 0$
$\Rightarrow$	$U\phi = R\, u\phi$	R kalibrační transformace

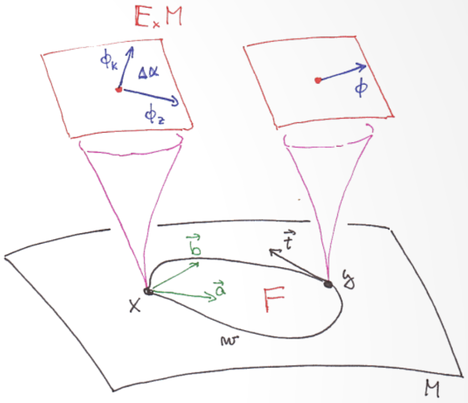
- krátký přenos: $R = I + \varepsilon\, A$ — A generátor kalibrační transformace
- rozklad do báze generátorů: $A = \sum_\alpha \mathcal{A}^\alpha\, \tau_\alpha$ — τ_α báze generátorů rotací

vektorový potenciál A či $\mathcal{A}$

$$D = \partial + A = \partial + \sum_\alpha \mathcal{A}^\alpha\, \tau_\alpha$$

Interakční pole

derivování *D*



- derivování = porovnávání veličin z blízkých vnitřních prostorů
- nulová derivace = veličina se nemění
- derivace definuje rovnoběžný přenos podél křivky
- kompatibilita s kinematickou strukturou

  = zachovávání úhlů a velikostí při rovnoběžném přenosu
- kompatibilita s kalibrační symetrií

  = rovnoběžný přenos podél smyčky je kalibrační transformace

popis vůči bázi

- volba báze v každém vnitřním prostoru
- definuje souřadnicové derivování ∂
- D-rovnoběžný přenos se liší od souřadnicového ∂-přenosu kalibrační transformací

D-rovnoběžný přenos:	$\phi \longrightarrow U\phi$	$D_{\vec{t}}\, U\phi = 0$
∂-rovnoběžný přenos:	$\phi \longrightarrow u\phi$	$\partial_{\vec{t}}\, u\phi = 0$
$\Rightarrow$	$U\phi = R\, u\phi$	R kalibrační transformace

- krátký přenos: $R = I + \varepsilon\, A$ — A generátor kalibrační transformace
- rozklad do báze generátorů: $A = \sum_\alpha \mathcal{A}^\alpha\, \tau_\alpha$ — τ_α báze generátorů rotací

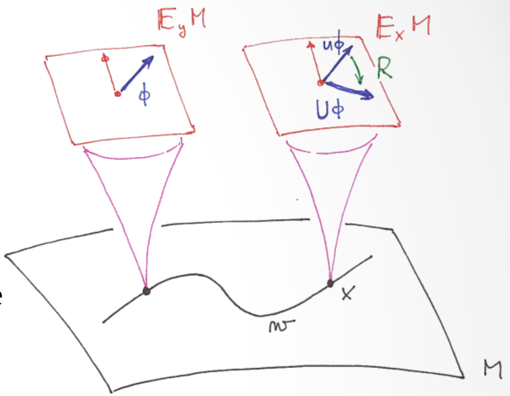
vektorový potenciál A či $\mathcal{A}$

$$D = \partial + A = \partial + \sum_\alpha \mathcal{A}^\alpha\, \tau_\alpha$$

Interakční pole

derivování D

- derivování = porovnávání veličin z blízkých vnitřních prostorů
- nulová derivace = veličina se nemění
- derivace definuje rovnoběžný přenos podél křivky
- kompatibilita s kinematickou strukturou
  = zachovávání úhlů a velikostí při rovnoběžném přenosu
- kompatibilita s kalibrační symetrií
  = rovnoběžný přenos podél smyčky je kalibrační transformace



popis vůči bázi

- volba báze v každém vnitřním prostoru
- definuje souřadnicové derivování ∂
- D-rovnoběžný přenos se liší od souřadnicového ∂-přenosu kalibrační transformací

D-rovnoběžný přenos:	$\phi \longrightarrow U\phi$	$D_{\vec{t}}\, U\phi = 0$
∂-rovnoběžný přenos:	$\phi \longrightarrow u\phi$	$\partial_{\vec{t}}\, u\phi = 0$
$\Rightarrow$	$U\phi = R\, u\phi$	R kalibrační transformace

- krátký přenos: $R = I + \varepsilon\, A$ — A generátor kalibrační transformace
- rozklad do báze generátorů: $A = \sum_\alpha \mathcal{A}^\alpha\, \tau_\alpha$ — τ_α báze generátorů rotací

vektorový potenciál A či $\mathcal{A}$

$$D = \partial + A = \partial + \textstyle\sum_\alpha \mathcal{A}^\alpha\, \tau_\alpha$$

Interakční pole

působení kalibrační transformace na D

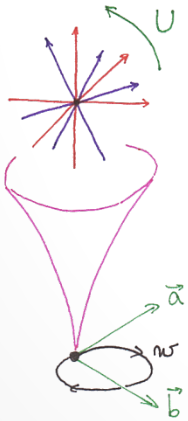
$$\phi \to \tilde{\phi} = R\phi \qquad \text{kompatibilita: } \widetilde{D\phi} = \tilde{D}\tilde{\phi}$$

$$\Downarrow$$

$$D \to \tilde{D} = D - (DR)R^{-1} \qquad A \to \tilde{A} = RAR^{-1} - (\partial R)R^{-1}$$

křivost D = intenzita interakčního pole

- D definuje rovnoběžný přenos
- netriviálnost rovnoběžného přenosu po smyčce = křivost



rovnoběžný přenos U po smyčce je kalibrační transformace
pro malou křivkou v rovině napnuté na $\vec{a}$ a $\vec{b}$ máme:

$$U = I + \varepsilon^2 F_{\vec{a},\vec{b}}$$

tenzor křivosti $F_{mn}{}^{A}{}_{B}$ – generátor kalibrační transformace
– prostoročasový tenzor (závislost na rovině $\vec{a}, \vec{b}$)

vektorový potenciál A $\Rightarrow$

$$F = \mathrm{d}A + [A, A]$$

Akce Yang-Millsovy teorie

bosonová látková pole (Higgs)

$$S_{\text{Higgs}}[\Phi, D, g] = -\int_\Omega \left[\frac{1}{2} D\Phi \cdot g \cdot D\Phi + V(\Phi)\right] d\Omega$$

fermionová látková pole (leptony a kvarky)

$$S_{\text{Dirac}}[\psi, D, g] = \int_\Omega [\bar{\psi} \cdot \not{D} \cdot \psi - m\,\bar{\psi} \cdot \psi] d\Omega$$

interakční pole (foton, gluony, $\boldsymbol{Z}$ a $\boldsymbol{W^\pm}$ bosony)

$$S_{\text{gauge}}[D, g] = -\frac{1}{4}\int_\Omega F^2\, d\Omega$$

$$\not{D} = \gamma \cdot D$$

$$D = \partial + A$$

$$F = \mathrm{d}A + [A, A]$$

Elektromagnetismus jako Yang-Millsova teorie

nabité pole ψ

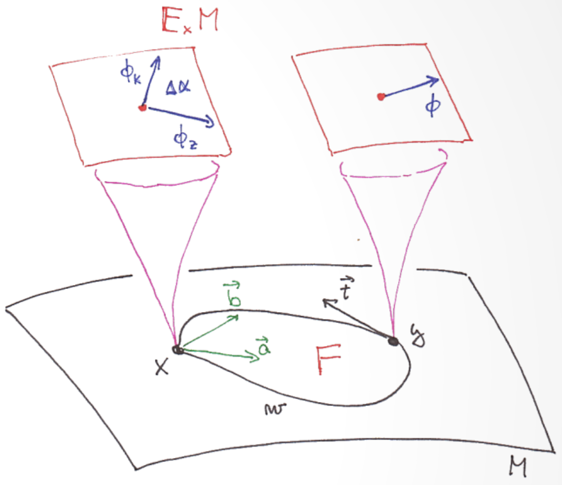
vnitřní prostor: $\dim E = 1\mathbb{C}$
kalibrační grupa: $U(1)$
kalibrační transformace: $R = e^{i\varrho}$

interakční pole D

vektorový potenciál: $D = \partial + iA$
pouze jeden generátor rotace $\Rightarrow A$ nenabité

křivost

křivost derivace D = Maxwellův tenzor $F = \mathrm{d}A$
změna fáze podél smyčky $\partial\Sigma$ je dána integrálem křivosti F přes Σ

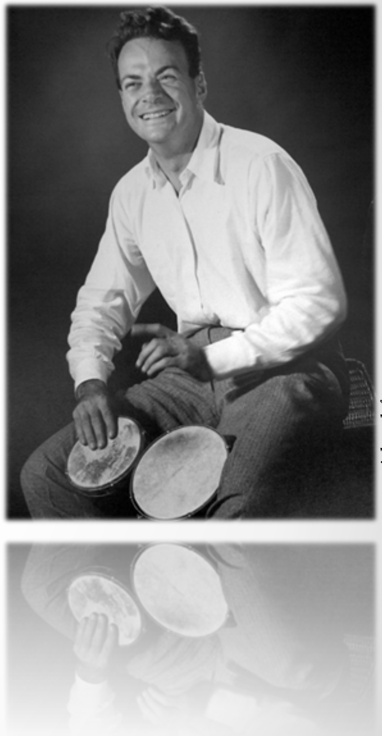


Princip akce z kvantové mechaniky

- ***kvantová teorie jako teorie předpovědí***
  nezajímá nás, jak se jevy „realizují“, ale jak jevy vidíme
  zajímají nás výroky popisující výstupy experimentu
  kvantová mechanika přiřazuje „pravdivost“ těmto výrokům

- ***kvantové jevy nejsou deterministické***
  předpovědi kvantové mechaniky jsou pravděpodobnostní
  pravděpodobnost jako „jistotní“ funkce

- ***závislost předpovědí na pozorovateli/experimentu***
  chování kvantového systém závisí na experimentálním uspořádání
  jen experimentálně dostupné otázky mají smysl



www.richard-feynman.net

Pravidla pro pravděpodobnosti a amplitudy

1. **pravděpodobnosti kvantově odlišitelných disjunktních jevů se sčítají**

   $P(H_1 \cup H_2) = P(H_1) + P(H_2)$ $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ H_1, H_2 kvantově odlišitelné

2. **pravděpodobnost minimálního kvantově odlišitelného jevu je kvadrát amplitudy**

   $P(H) = |A(H)|^2$ H minimální kvantově odlišitelný

3. **amplitudy disjunktních jevů se sčítají**

   $A(H_1 \cup H_2) = A(H_1) + A(H_2)$ $H_1 \cap H_2 = \emptyset$

4. **amplitudy nezávislých jevů se násobí**

   $A(H_1 \otimes H_2) = A(H_1)A(H_2)$ H_1, H_2 nezávislé (různé systémy, časová posloupnost, …)

5. **amplituda elementární historie je dána exponenciálou akce**

   $\mathcal{D}A(h) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(h)\right)\mathcal{D}h$ h elementární historie

Volná amplituda

amplituda s fixovanými koncovými body

$$G(x_K|x_Z) = \int\limits_{w:x_Z\to x_K} \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(w)\right)\,\mathcal{D}w$$

volná relativistická částice

$$S[w] = -m\int_I d\tau$$

virtuální dráhy

Volná amplituda

amplituda s fixovanými koncovými body

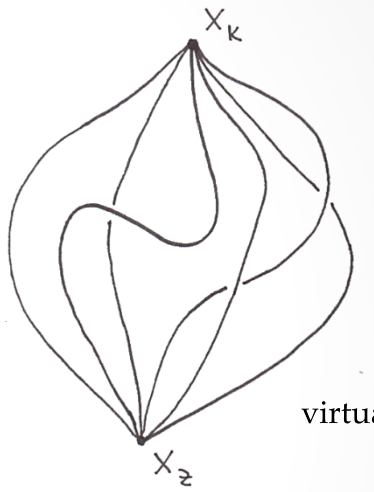
$$G(x_K|x_Z) = \int_{w:x_Z \to x_K} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(w)\right) \mathcal{D}\mathrm{w}$$

volná relativistická částice

$$S[w] = -m \int_I d\tau$$

volná amplituda (Feynmanův propagátor)

$$[-\nabla^2 + m^2]G = \delta$$



virtuální dráhy

Volná amplituda

amplituda s fixovanými koncovými body

$$G(x_K|x_Z) = \int_{w:x_Z\to x_K} \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(w)\right)\mathcal{D}\mathrm{w}$$

volná relativistická částice

$$S[w] = -m\int_I d\tau$$

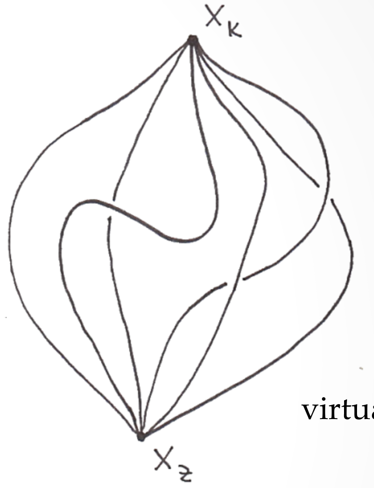
volná amplituda (Feynmanův propagátor)

$$[-\nabla^2 + m^2]G = \delta$$

$$G(x_K|x_Z) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{\exp(ip\Delta x)}{p^2 + m^2 - i0}\, d^4p$$

$$\Delta x = x_K - x_Z$$

$$G(x_K|x_Z) = \frac{1}{4\pi}\delta(\Delta x^2) - \theta(-\Delta x^2)\frac{m}{8\pi\sqrt{-\Delta x^2}}H_1^{(2)}\left(m\sqrt{-\Delta x^2}\right) + \theta(\Delta x^2)\frac{im}{4\pi^2\sqrt{\Delta x^2}}K_1\left(m\sqrt{\Delta x^2}\right)$$



virtuální dráhy

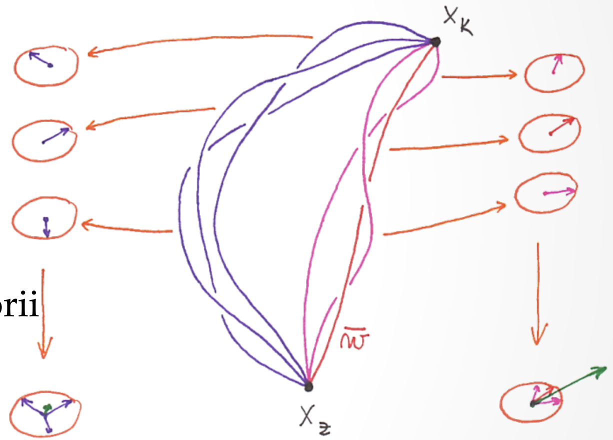
Princip extrémální akce z kvantové mechaniky

amplituda fixovaná koncovými body

$$G(x_K|x_Z) = \int_{w:x_Z \to x_K} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(w)\right) \mathcal{D}w$$

klasický režim

- $S \gg \hbar \quad \Rightarrow$ rychle oscilující integrál
- příspěvky blízkých trajektorií se ruší
- výjimkou jsou trajektorie blízké k extrémní trajektorii
- klasická trajektorie dává dominantní příspěvek



někdy příště …

Jazyk fundamentálních teorií:
kvantové částice, pole a struny