Úlohy na Lieovy grupy

Termín zadání: úterý 19.12.2023
Termín odevzdání: ideálně do pondělí **14.1.2024**

Homomorfismus z $SL(2,\mathbb{C})$ na L^0

Nechť ϕ je homomorfismus z $SL(2,\mathbb{C})$ na L^0 zkonstruovaný na přednášce (viz poznámky na webu).

1. (5 bodů) Ukažte, že jádro tohoto homomorfismu $\operatorname{Ker}\phi = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$.
   Poznámka: Nestačí ukázat, že matice $\mathbf{1}$ a $-\mathbf{1}$ patří do $\operatorname{Ker}\phi$, ale že není žádná jiná matice $A \in SL(2,\mathbb{C})$, která se zobrazí na identitu v L^0.

2. (5 bodů) Najděte matici $A \in SL(2,\mathbb{C})$, která se při tomto homomorfismu zobrazí na transformaci 4-vektoru $(x_0, x_1, x_2, x_3)^T$ odpovídající rotaci kolem osy x_1 o úhel α.

Levoinvariantní vektorová pole grupy $GA(1,\mathbb{R})$ a její jednoparametrické podrupy

Grupa $GA(1,\mathbb{R})$ je grupou všech lineárních transformací

$$x' = ax + b, \qquad a \neq 0,\ b \in \mathbb{R}\,.$$

Jedná se tedy o dvouparametrickou Lieovu grupu, jejíž každý prvek je dán dvojicí parametrů $g = (a, b)$.

1. (5 bodů) Určete levoinvariantní vektorová pole této grupy a strukturní konstanty ve vhodné bázi příslušné Lieovy algebry.

2. (5 bodů) Určete jednoparametrickou podgrupu této grupy odpovídající obecnému prvku příslušné Lieovy algebry, tj. pro obecnou lineární kombinaci bázových prvků této Lieovy algebry.
   Poznámka: Úlohu lze řešit i maticově přepsáním tranformací pomocí matic 2×2.

Jednoparametrické podgrupy Lieovy grupy $SL(2,\mathbb{R})$ a její „nepokrytí“ exponenciálním zobrazením

Grupa $SL(2,\mathbb{R})$ je grupa všech reálných matic $A_{2\times 2}$, pro které $\det A = 1$, neboli

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad ad - bc = 1\,.$$

1. (5 bodů) Určete jednoparametrické podgrupy této grupy a stopy matic těchto podgrup.
   Nápověda: Napište si obecný tvar matice C z příslušné Lieovy algebry $sl(2,\mathbb{R})$ této grupy a spočtěte přímo $\exp Ct$ v závislosti na znaménku $\det C$.

2. (5 bodů) Na základě výsledku předchozí úlohy ukažte, že exponenciální zobrazení nepokrývá celou grupu $SL(2,\mathbb{R})$, ač je tato grupa souvislá. *Hint:* Zamyslete se nad stopami.