Sdružené prvky a jejich třídy (conjugacy classes)

Def: Prvek $g_1 \in G$ je sdružený s prvkem $g_2 \in G$ $(g_1 \sim g_2)$, pokud $\exists h \in G: h g_1 h^{-1} = g_2$.

- jde o relaci ekvivalence: 1) $g \sim g$ (pomocí $e \in G$)
  2) $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_2 \sim g_1$ (pomocí h^{-1})
  3) $g_1 \sim g_2$ a $g_2 \sim g_3 \Rightarrow g_1 \sim g_3$ (díky vztahu $(h_1 h_2)^{-1} = h_2^{-1} h_1^{-1}$)

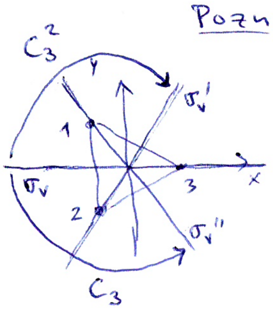
  a tedy grupa G se rozpadá na třídy ekvivalence, kterým říkáme třídy sdružených prvků, značí se C_g nebo (g), které vždy obsahují všechny prvky z G sdružené ke g
- uvidíme, že tyto třídy hrají důležitou roli v teorii reprezentací grup, u konečných grup bude počet tříd sdružených prvků roven počtu neekvivalentních ireducibilních reprezentací

Př: $C_{3v} = \{E, C_3, C_3^2, \sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}$

zde dostaneme 3 třídy: $(E) = \{E\}$ – identita vždy samostatně $(geg^{-1} = e)$

$(C_3) = \{C_3, C_3^2\}$ – neboť např. $\sigma_v C_3 \sigma_v = C_3^2 = \sigma_v' C_3 \sigma_v' = \sigma_v'' C_3 \sigma_v''$

$(\sigma_v) = \{\sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}$ – nyní např. $C_3 \sigma_v C_3^2 = \sigma_v'' = \sigma_v' \sigma_v \sigma_v'$ atd.



Pozn: geometrická interpretace

- rotaci C_3 lze převést na $C_3^{-1} = C_3^2$ pomocí zrcadlení σ_v, ne však pomocí C_3 nebo C_3^2 $\Rightarrow$ grupa C_3 má třídy $(C_3) = \{C_3\}$, $(C_3^2) = \{C_3^2\}$
- zrcadlení σ_v lze převést na jiné zrcadlení σ_v' nebo σ_v'' buď pomocí rotací, nebo pomocí třetího zrcadlení

toto platí obecně u bodových grup: dvě operace symetrie patří do stejné třídy, pokud existuje operace (v grupě), která převede prvky těchto symetrií na sebe

- na příkladu C_{3v} vidíme, že počet prvků třídy dělí $\#G$
  to platí obecně u konečných grup, důkaz později (viz působení grupy na množině a na sobě samé)
- je-li G abelovská, pak $(g) = \{g\}$ pro $\forall g \in G$, neboť $g_1 = h g_2 h^{-1} = g_2 h h^{-1} = g_2$

Normální podgrupa a faktorová grupa

Def: Podgrupa $H \leq G$ je normální, pokud pro $\forall g \in G$ platí $gHg^{-1} \subset H$.

- někdy se jí také říká invariantní (vůči sdružení), značení $H \triangleleft G$
- vlastnosti, které můžou sloužit i jako ekvivalentní definice:

1) díky větě o přeuspořádání musí ve skutečnosti platit

$$gHg^{-1} = H \quad \text{a tedy } gH = Hg \quad \text{pro } \forall g \in G$$

tj. pro normální podgrupy jsou levé a pravé rozkladové třídy stejné a též obráceně

2) pro normální podgrupu je možné násobit levé (nebo pravé) třídy mezi sebou s tím, že výsledek je opět levá (pravá) třída

nebot' $(g_1H)(g_2H) = (g_1g_2)H$ díky $Hg_2 = g_2H$ a $HH = H$

- druhá vlastnost umožňuje zavést tzv. faktorovou grupu

Def: Množina $G/H = \{gH : g \in G\}$ (levý (nebo pravý) rozklad grupy G, kdy každou třídu bereme pouze jednou)

s operací násobení tříd tvoří grupu zvanou faktorová grupa nebo též faktorgrupa

- jednotkový prvek (identita) je $eH = H$ a inverzní $(gH)^{-1} = g^{-1}H$

Př: normální podgrupa grupy $C_{3v} = G$ je

$C_3 = H = \{E, C_3, C_3^2\}$ nebot' jsme viděli dříve, že $g C_3 g^{-1} = C_3^2 \in H$ pro $g = \sigma_v, \sigma_v'$ a σ_v'' a pro $g = C_3$ a C_3^2 je výsledek triviálně též v H

- odpovídající levé třídy jsou H a $\sigma_v H = \{\sigma_v, \sigma_v'', \sigma_v'\}$

a tedy faktorgrupa $C_{3v}/C_3 = \{H, \sigma_v H\}$, která je izomorfní s grupou $C_s = \{E, \sigma\}$

- ovšem podgrupa $\{E, \sigma_v\}$ není normální,

nebot' např. $\sigma_v' \sigma_v \sigma_v' = C_3 \sigma_v' = \sigma_v'' \notin \{E, \sigma_v\}$

- normální podgrupy jsou důležité pro rozklady grup na přímé a polopřímé součiny