Přímý (též direktní) součin grup

Def: Nechť G_1 a G_2 jsou libovolné grupy a $g_1 \in G_1$ a $g_2 \in G_2$.
Množina všech uspořádaných dvojic (g_1, g_2) s binární operací $(g_1, g_2)(h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)$ tvoří grupu, která se nazývá přímý (direktní) součin grup G_1 a G_2 a která se značí $G_1 \otimes G_2$ (nebo i $G_1 \times G_2$).

- identita je (e_1, e_2) a inverzní prvek $(g_1, g_2)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1})$
- řád této grupy je $\# G_1 \otimes G_2 = \# G_1 \cdot \# G_2$ (pro konečné grupy)
- $\{(g_1, e_2) : g_1 \in G_1\}$ tvoří podgrupu (normální) izomorfní s G_1 a podobně pro $G_2 \sim \{(e_1, g_2) : g_2 \in G_2\}$, prvky těchto podgrup komutují $(g_1, e_2)(e_1, g_2) = (g_1, g_2) = (e_1, g_2)(g_1, e_2)$ a mají jediný společný prvek (e_1, e_2)
- navíc lze každý prvek $G_1 \otimes G_2$ vyjádřit jako součin dvou prvků z těchto podgrup $\Rightarrow$

Def: Řekneme, že určitá grupa G je přímým součinem dvou svých podgrup G_1 a G_2, pokud je izomorfní grupě $G_1 \otimes G_2$.

- výše uvedené vlastnosti jsou dostatečným kritériem:
  - pokud $G_1 \leq G$ a $G_2 \leq G$, které mají jediný společný prvek e, všechny prvky $g_1 \in G_1$ komutují se všemi $g_2 \in G_2$ a každý prvek $g \in G$ lze psát jako $g = g_1 g_2$, pak je nutně $G \sim G_1 \otimes G_2$ a jde tedy o přímý součin G_1 a G_2.

- z podmínky $G_1 \cap G_2 = \{e\}$ plyne jednoznačnost rozkladu $g = g_1 g_2$ neboť kdyby $g = g_1 g_2 = h_1 h_2 \Rightarrow \underset{\in G_1}{h_1^{-1} g_1} = \underset{\in G_2}{h_2 g_2^{-1}} = e$ a tedy $h_1 = g_1$ a $h_2 = g_2$

- podmínka komutativity $\forall g_1 \in G_1$ se $\forall g_2 \in G_2$ je ekvivalentní podmínce, že G_1 a G_2 jsou normální podgrupy

Dk: $\Rightarrow$ nechť $g = h_1 h_2$, pak $g g_1 g^{-1} = h_1 h_2 g_1 h_2^{-1} h_1^{-1} = h_1 g_1 h_1^{-1} \in G_1$ a podobně pro G_2

$\Leftarrow$ uvažujme komutátor $\underbrace{g_1 g_2 g_1^{-1}}_{\in G_2} g_2^{-1}$, $g_1 \underbrace{g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}}_{\in G_1}$: $\in G_1 \wedge \in G_2$ a tedy $= e$ $\Rightarrow g_1 g_2 = g_2 g_1$

Polopřímý (též semidirektní) součin grup

• aneb, když je jen jedna z podgrup normální

Def: G je polopřímým součinem dvou svých podgrup G_1 a G_2, tj. $G = G_1 ⓢ G_2$, nebo $G = G_1 \rtimes G_2$, pokud

1) G_1 a G_2 mají jediný společný prvek e
2) $\forall g \in G$ lze napsat jako $g = g_1 g_2$, kde $g_1 \in G_1$ a $g_2 \in G_2$
3) G_1 je normální podgrupou grupy G

• opět 1) implikuje jednoznačnost rozkladu $g = g_1 g_2$

Př: C_{3v} je polopřímý součin podgrup $G_1 = \{E, C_3, C_3^2\}$, která je normální, a $G_2 = \{E, \sigma_v\}$, která není normální, neboli

$$C_{3v} = \{E, C_3, C_3^2\} \rtimes \{E, \sigma_v\} = C_3 \rtimes C_s$$

neboť $\forall g \in C_{3v}$ lze zapsat jako $g_1 g_2$:

$$E = E \cdot E, \quad C_3 = C_3 E, \quad C_3^2 = C_3^2 E, \quad \sigma_v = E \sigma_v, \quad \sigma_v' = C_3 \sigma_v, \quad \sigma_v'' = C_3^2 \sigma_v$$

- ovšem nejde o přímý součin, neboť C_3 a C_3^2 nekomutují s σ_v
- $\{E, C_3, C_3^2\} \times \{E, \sigma_v\}$ je ve skutečnosti izomorfní s cyklickou 6-prvkovou grupou, generátorem je $(C_3, \sigma_v)^6 = (E, E)$

Př: Euklidovská grupa E^3 je grupa všech lin. transformací v $\mathbb{R}^3$ zachovávajících vzdálenosti a úhly:

G_1 je nyní podgrupa všech translací (je normální)

a G_2 podgrupa všech rotací (můžou být i nevlastní)

neboť je-li $\vec{r}\,' = \{R, \vec{t}\}\vec{r} = R\vec{r} + \vec{t}$, tak složení –

dostaneme
$$\{R_1, \vec{t}_1\}\{R_2, \vec{t}_2\} = \{R_1 R_2, R_1 \vec{t}_2 + \vec{t}_1\}$$
$$\{R, \vec{t}\}^{-1} = \{R^{-1}, -R^{-1}\vec{t}\}$$

a tedy
$$\underset{\substack{\cap \\ E^3}}{\{R, \vec{t}\}}\;\underset{\substack{\cap \\ G_1}}{\{1, \vec{a}\}}\;\underset{\substack{\cap \\ E^3}}{\{R, \vec{t}\}^{-1}} = \{1, R\vec{a}\} \in G_1$$
(opět translace)

a protože $\{R, \vec{t}\} = \{1, \vec{t}\}\{R, \vec{0}\}$

musí být $E^3 = G_1 \rtimes G_2$

• podobně lze rozložit Poincaréovu grupu