Více o třídách sdružených prvků a normálních podgrupách

- Násobení tříd a tzv. konstanty tříd (toto bude důležité později při důkazu #ired. repr. = # tříd sdruž. prvků u konečných grp)

  - pokud vynásobíme dvě třídy sdružených prvků a ponecháme všechny součiny včetně opakujících se, dostaneme

$$(g_k)(g_\ell) = \{ g_i g_j \mid g_i \in (g_k) \text{ a } g_j \in (g_\ell)\} = \sum_{(g_m)} C^m_{k\ell}\,(g_m)$$

přes všechny třídy (různé)

kde $C^m_{k\ell} \geq 0$ jsou konstanty tříd

a protože se prvky můžou opakovat, může být $C^m_{k\ell} > 1$ pro jisté k,ℓ,m

  - toto plyne z obecnějšího tvrzení:

Nechť C je množina prvků G, ve které se můžou prvky opakovat, (tj. nelze psát $C \subset G$). Pak

$$\underbrace{g C g^{-1}}_{} = C \text{ pro } \forall g \in G \iff C = \sum_{(g_k)} a_k (g_k)$$

zde opět ponecháváme všechny výsledné prvky — opět suma přes všechny různé třídy

Dk: $\Rightarrow$ sporem

Nechť $gCg^{-1} = C$ pro $\forall g \in G$ a zároveň $C = \sum_{(g_k)} a_k (g_k) + Z$ — zbytek, kde nejsou úplné třídy

kde Z je neprázdné a pro $a \in Z$: $(a) \not\subset Z$

Pak ale dle předpokladu $gZg^{-1} = Z$ pro $\forall g \in G$,

toto je vlastně důkaz $\Leftarrow$ → [neboť $g(g_k)g^{-1} = (g_k)$ (dle VoP) a tedy i $g\left(\sum_{(g_k)} a_k (g_k)\right) g^{-1} = \sum_{(g_k)} a_k (g_k)$]

a tedy pokud $a \in Z$, pak i $gag^{-1} \in Z \Rightarrow (a) \subset Z$ což je spor

Př. C_{3v} má třídy

$(E) = \{E\}$

$(C_3) = \{C_3, C_3^2\}$

$(\sigma_v) = \{\sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}$

a dostaneme

$(E)(g_k) = (g_k)$ pro g_k libovolné

$(C_3)(C_3) = \{C_3^2, E, E, C_3\} = 2(E) + (C_3)$

$(C_3)(\sigma_v) = 2(\sigma_v)$

$(\sigma_v)(C_3) = 2(\sigma_v)$

$(\sigma_v)(\sigma_v) = 3(E) + 3(C_3)$

toto jsou konstanty tříd

- Věta: $H \triangleleft G \iff H$ se skládá z celých tříd sdružených prvků grupy G.

Dk. zřejmý z definic a tvrzení výše o množině C: $gCg^{-1} = C \Leftrightarrow C = \sum_{(g_k)} a_k (g_k)$

- Centrum grupy G je podgrupa $Z(G)$ obsahující prvky G, které komutují se všemi $g \in G$, tj. (zřejmě jde tedy o abelovskou podgrupu)

$$Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz \text{ pro } \forall g \in G\}$$

  - jde vskutku o podgrupu: $e \in Z(G)$

    $zg = gz \Rightarrow gz^{-1} = z^{-1}g$ (asociativita zřejmá)

    a pro $z_1 \in Z(G)$ a $z_2 \in Z(G) \Rightarrow (z_1 z_2) g = z_1 g z_2 = g z_1 z_2$

  - jde o normální podgrupu (neboť $gzg^{-1} = zgg^{-1} = z$) složenou z jednoprvkových tříd $(z) = \{z\}$
  - pokud je G abelovská, pak $Z(G) = G$

- Grupa je prostá (simple), pokud neobsahuje žádnou netriviální (tj. různou od $\{e\}$ a G) normální podgrupu
- Grupa je poloprostá (semi simple), pokud neobsahuje žádnou netriviální abelovskou normální podgrupu
  - tyto charakterizace grup hrají důležitou roli v klasifikaci konečných a Lieových grup a také v teorii reprezentací grup