Homomorfismus a izomorfismus

- umožňují vyšetřovat vztahy mezi grupami
- speciálním homomorfismem bude reprezentace grupy na vektorovém prostoru, půjde o homomorfismus z grupy do grupy všech lineárních transformací na tento prostoru

Def: Homomorfismus z grupy G do grupy H je zobrazení $\varphi: G \to H$, pro které platí $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ pro $\forall a, b \in G$,

tj. φ přenáší (zachovává) grupovou operaci.

– pro $b = e_G$: $\varphi(ae_G) = \varphi(a) = \varphi(a)\cdot\varphi(e_G) \Rightarrow \varphi(e_G) = e_H$, obdobně $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$

- Izomorfismus = bijektivní (prostý a na) homomorfismus

  Monomorfismus = injektivní (prostý) homomorfismus

  Epimorfismus = surjektivní (na) homomorfismus

- Pokud jsou obě grupy stejné, tj. $G = H$, pak se homomorfismus nazývá endomorfismus a izomorfismus je automorfismus.
- Speciálně vnitřní automorfismus je $\phi_a(g) = aga^{-1}$ pro $\forall a, g \in G$
- Obdobně je to i u jiných matematických struktur, jako vektorových prostoru či Lieových algeber

  $\varphi(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\varphi(\vec{v}) + \beta\varphi(\vec{w})$ $\qquad$ $\varphi([\vec{v}, \vec{w}]) = [\varphi(\vec{v}), \varphi(\vec{w})]$

Def: Nechť $\varphi: G \to H$ je homomorfismus.

Pak $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{g \in G : \varphi(g) = e_H\}$ je jádro homomorfismu

a $\mathrm{Im}\,\varphi = \{h \in H : h = \varphi(g)$ pro nějaké $g \in G\}$ je obraz hom.

- platí, že 1) $\mathrm{Ker}\,\varphi$ je normální podgrupa grupy G

  Dk: Nechť $g \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ a $a \in G$, pak (že jde o podgrupu je přímočaré)

  $$\varphi(aga^{-1}) = \varphi(a)\varphi(g)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)e_H\varphi(a^{-1}) = e_H$$

  neboli $aga^{-1} \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ pro libovolné $a \in G$

  2) $\mathrm{Im}\,\varphi$ je podgrupa grupy H

  Dk: $e_H \in \mathrm{Im}\,\varphi$ neboť $\varphi(e_G) = e_H$

  $\varphi(a)^{-1} \in \mathrm{Im}\,\varphi$ neboť $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$

  uzavřenost a asociativita z definice a vlastností G

- pokud je H normální podgrupa grupy G, tj. $H \triangleleft G$,

  potom zobrazení $\pi : G \to G/H$
  $\pi : g \mapsto gH$ pro $\forall g \in G$

  nazýváme <u>přirozená projekce</u> G na faktorgrupu G/H.

  – π je epimorfismus a $\mathrm{Ker}\,\pi = H$

  neboť pro $\forall g, h \in G$: $\pi(gh) = ghH = (gH)(hH) = \pi(g)\pi(h)$

  a navíc pro $h \in H$: $\pi(h) = hH = eH$, což je identita v G/H

  a pokud $g \notin H$: $\pi(g) = gH \neq H$

<u>Působení grupy na množině či prostoru</u>

- pokud je určitá abstraktní grupa realizována jako transformace nějaké množiny či prostoru, říkáme, že grupa působí na této množině či prostoru, ovšem obecně nemusí jít o realizaci grupy

<u>Def</u>: <u>Grupa G působí na množině M</u>, pokud existuje zobrazení

$\varphi : G \times M \to M$ takové, že pro všechny $g \in G$ a $m \in M$

je dáno $\varphi(g,m) = T(g)m \equiv g \cdot m$, kde $T(g)$ je nějaká transformace M

a platí

$$g(h \cdot m) = (gh) \cdot m \quad \text{pro } \forall g, h \in G \text{ a } m \in M$$

$$\text{a} \quad e \cdot m = m \quad \text{pro } \forall m \in M \text{ a identitu } e \in G$$

- jde tedy o <u>homomorfismus z G do</u> grupy všech transformací množiny M, tj. není nutno, aby různým prvkům $g, h \in G$ odpovídaly různé transformace $T(g)$ a $T(h)$ (může být $T(g) = T(h)$)

- uvidíme později, že reprezentace grup jsou jejich lineární působení na vektorových prostorech