- pokud je H normální podgrupa grupy G, tj. $H \triangleleft G$,

  potom zobrazení $\pi: G \to G/H$
  $\pi: g \mapsto gH$ pro $\forall g \in G$

  nazýváme <u>přirozená projekce</u> G na faktorgrupu G/H.

  – π je epimorfismus a $\mathrm{Ker}\,\pi = H$

  neboť pro $\forall g, h \in G$: $\pi(gh) = ghH = (gH)(hH) = \pi(g)\pi(h)$

  a navíc pro $h \in H$: $\pi(h) = hH = eH$, což je identita v G/H

  a pokud $g \notin H$: $\pi(g) = gH \neq H$

<u>Působení grupy na množině či prostoru</u>

- pokud je určitá abstraktní grupa realizována jako transformace nějaké množiny či prostoru, říkáme, že grupa působí na této množině či prostoru, ovšem obecně nemusí jít o realizaci grupy

<u>Def:</u> <u>Grupa G působí na množině M</u>, pokud existuje zobrazení

$\varphi: G \times M \to M$ takové, že pro všechny $g \in G$ a $m \in M$

je dáno $\varphi(g,m) = T(g)m \equiv g \cdot m$, kde $T(g)$ je nějaká transformace M

a platí

$$g(h \cdot m) = (gh) \cdot m \quad \text{pro } \forall g, h \in G \text{ a } m \in M$$

$$\text{a} \quad e \cdot m = m \quad \text{pro } \forall m \in M \text{ a identitu } e \in G$$

- jde tedy o <u>homomorfismus z G do</u> grupy všech transformací množiny M, tj. není nutno, aby různým prvkům $g, h \in G$ odpovídaly různé transformace $T(g)$ a $T(h)$ (může být $T(g) = T(h)$)

- uvidíme později, že reprezentace grup jsou jejich lineární působení na vektorových prostorech

Def: Orbita prvku $m \in M$ při působení grupy G je podmnožina $G\cdot m \subset M$ složená z prvků $g\cdot m \in M$ pro $\forall g \in G$, tj. $G\cdot m = \{gm, g \in G\}$

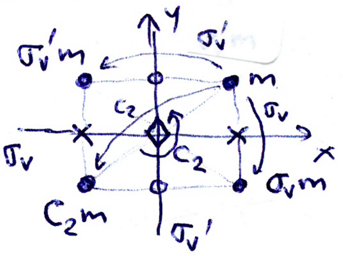
Def: Stabilizátor (též izotropní grupa) G_m příslušný prvku $m \in M$ je množina $g \in G$, pro které $g\cdot m = m$.

- jde o podgrupu $G_m \leq G$, neboť $e \in G_m$ (z definice)

  a pokud $g \in G_m$, pak $m = e\cdot m = (g^{-1}g)m = g^{-1}(g\cdot m) = g^{-1}\cdot m$

  a navíc pokud $g\cdot m = m$ a $h\cdot m = m$, pak $(g\cdot h)m = g(hm) = m$

Př: působení C_{2v} (grupa symetrie H_2O) v rovině (x,y)



obecný bod • má 4-prvkovou orbitu a $G_\bullet = \{E\}$

bod na ose x × má 2-prvkovou orbitu a $G_\times = \{E, \sigma_v\}$

bod na ose y o má 2-prvkovou orbitu a $G_\circ = \{E, \sigma_v'\}$

a počátek ◊ má 1-prvkovou orbitu a $G_\diamond = C_{2v}$

Věta: Pro konečnou grupu platí obecně $\#G = \#G_m \cdot \#(G\cdot m)$

Dk: G_m je podgrupou G a tedy dle Lagrangeovy věty $\#G_m$ dělí $\#G$. Navíc máme rozklad G na levé třídy $g\cdot G_m$, pro které platí $(gG_m)\cdot m = g\cdot m = n$, tj. všechny prvky jedné levé třídy převádí m na stejný bod n.

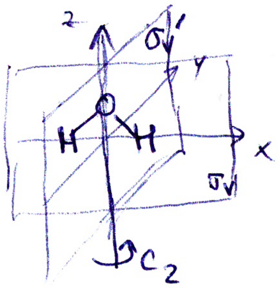
A protože nemůže pro dvě různé levé třídy platit, že $(g_1G_m)m = (g_2G_m)m = n$, neboť pak by platilo

$$g_1 m = g_2 m \Rightarrow (g_1^{-1}g_2)m = m \Rightarrow g_1^{-1}g_2 \in G_m$$

$$\Rightarrow g_2 = g_1(g_1^{-1}g_2) \in g_1G_m \text{ a zároveň } \in g_2G_m, \text{ což je spor,}$$

dostáváme tolik různých bodů orbity, kolik je levých tříd gG_m, a tedy $\#G = \#G_m \cdot \#(G\cdot m)$.

Př: působení $C_{2v}=\{E, C_2, \sigma_v, \sigma_v'\}$ v prostoru $\mathbb{R}^3$



E	C_2	σ_v	σ_v'
C_2	E	σ_v'	σ_v
σ_v	σ_v'	E	C_2
σ_v'	σ_v	C_2	E

- zobrazení φ je dáno maticemi 3×3 odpovídajícími příslušným transformacím:

$$D(g)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

kde
$$D(E)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ D(C_2)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ D(\sigma_v)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ D(\sigma_v')=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

- tyto čtyři matice tvoří grupu s bin. operací maticové násobení
  která je samozřejmě izomorfní s C_{2v}, jde o tzv.
  <u>věrnou</u> maticovou reprezentaci grupy C_{2v}
  a jde o podgrupu $O(3)$ (= grupa všech matic s $\det = \pm 1$)
  a máme tedy homomorfismus z C_{2v} do $O(3)$ (transformace na prostoru $\mathbb{R}^3$)
- v tomto případě lze ale působit zvlášť na x, y a z:
  např. pro x: $D_x(E)=(1)$, $D_x(C_2)=(-1)$, $D_x(\sigma_v)=(1)$ a $D_x(\sigma_v')=(-1)$
  přičemž platí $D_x(g)(x)=(x')$
  nyní jde o homomorfismus (dokonce epimorfismus)
  z C_{2v} na $G\cdot(\{1,-1\},\cdot)=$ „$O(1)$"
  obdobně pro y, avšak pro působení na z bude
  (avšak jiná repr.)
  $$D_z(E)=D_z(C_2)=D_z(\sigma_v)=D_z(\sigma_v')=(1)$$
  a jde o tzv. triviální reprezentaci z C_{2v} na $G=(\{1\},\cdot)$

- $D(g)$ tvoří trojrozměrnou reprezentaci a $\mathrm{Ker}\,D=\{E\}$

- $D_x(g)$ a $D_y(g)$ tvoří různé jednorozměrné reprezentace,
  které jsou netriviální s $\mathrm{Ker}\,D_x=\{E,\sigma_v\}$ a $\mathrm{Ker}\,D_y=\{E,\sigma_v'\}$
  a konečně $D_z(g)$ je triviální s $\mathrm{Ker}\,D_z=C_{2v}$

Působení grupy G na sobě

- pokud $M = G$, působí grupa G na sobě samé
- je několik možností, jak může působit, např.

1) <u>levé a pravé posunutí</u>:

pro $\forall g \in G$ definujeme zobrazení

$$L_g : G \to G \quad \text{neboli} \quad L_g : h \mapsto gh$$

$$R_g : G \to G \quad \text{neboli} \quad R_g : h \mapsto hg$$

- jde o bijektivní zobrazení (viz VoP)
  a navíc o tzv. <u>tranzitivní</u> působení G na sobě,
  neboť G tvoří jedinou orbitu a vždy $G_g = \{e\}$ pro $\forall g \in G$.

2) G působí na sobě přes sdružení (tzv. <u>vnitřní automorfismus</u>)

kdy $T(g)\cdot h = ghg^{-1}$ pro $\forall g, h \in G$

neboť platí $T(e)\cdot h = ehe^{-1} = h$

a $T(g_1 g_2) h = (g_1 g_2) h (g_1 g_2)^{-1} = g_1 (g_2 h g_2^{-1}) g_1^{-1} =$

$= T(g_1) T(g_2)\cdot h$

- nyní jsou <u>orbitami třídy sdružených prvků</u>
  a stabilizátory jsou podgrupy G složené
  z prvků $g \in G$, pro které $ghg^{-1} = h$
- opět musí platit $\#(G\cdot g)\cdot \# G_g = \# G$
  a tedy počet prvků třídy složených prvků $\#(g) = \#(G\cdot g)$
  musí dělit $\# G$.

<u>Př.</u> vnitřní automorfismus C_{3v}

třídy	stabilizátory	
$(E) = \{E\}$	$G_E = C_{3v}$	
$(C_3) = \{C_3, C_3^2\}$	$G_{C_3} = \{E, C_3, C_3^2\}$	neboť $C_3 C_3 C_3^{-1} = C_3$, $\sigma_v C_3 \sigma_v = C_3^2$ atd.
$(\sigma_v) = \{\sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}$	$G_{\sigma_v} = \{E, \sigma_v\}$	neboť $\sigma_v \sigma_v \sigma_v^{-1} = \sigma_v$
		ale $C_3 \sigma_v C_3^{-1} = \sigma_v'' = \sigma_v' \sigma_v \sigma_v'^{-1}$ apod.