Úplná reducibilita

- v příkladu jsme viděli, že repr. SO(2) na $\mathbb{R}^3$ byla tvořena dvěmi podreprezentacemi $R^2_{\varphi\downarrow W_1}$ a $R^2_{\varphi\downarrow W_2}$, přičemž $W_1 \perp W_2$ a R^2_φ byla blokově diagonální $\left(\begin{array}{c|c} \cancel{\ } & 0 \\ \hline 0 & \ast \end{array}\right)$ (tj. matice $D^{WW'}(g)$ z předchozího výkladu reducibility byla nulová)

$\Longrightarrow$ zavádí se pojem úplné reducibility a bude nás zajímat, zda je to obecná vlastnost reducibilních reprezentací.

Def: Reprezentace (g, V) grupy G (či algebry $\mathcal{L}$) je úplně reducibilní (též rozložitelná), pokud existuje rozklad $V = \sum_{j\in J} \oplus V_j$, kde V_j jsou ireducibilní invariantní podprostory V při působení G.

- J je obecně množina indexů, která je pro konečně rozměrné prostory konečná, tedy $J = (1, 2, \dots, p)$ a volbou vhodné báze

$$\underbrace{e_{11}, \dots, e_{1d_1}}_{\in V_1}, \underbrace{e_{21}, \dots e_{2d_2}}_{\in V_2}, \dots, \underbrace{e_{p1}, \dots, e_{pd_p}}_{\in V_p}$$

dostaneme maticovou reprezentaci ve tvaru $D(g) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} D^1(g) & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & D^2(g) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & D^p(g) \end{array}\right)$

tj. $D(g) = D^1(g) \oplus D^2(g) \oplus \dots \oplus D^p(g)$

kde $D^1(g), \dots D^p(g)$ jsou již ireducibilní matic. repr.

(Ve fyzikálních aplikacích se často používá značení $\Gamma = \underbrace{\Gamma^1 \oplus \dots \oplus \Gamma^p}_{\text{ireducibilní repr. grupy } G}$)

Pro maticové reprezentace $D'(g)$ grupy G lze opět definovat úplnou reducibilitu tak, že musí existovat matice A, že $D'(g) = A D(g) A^{-1}$, kde $D(g)$ je v blokově diag. tvaru

- **Kdy je reducibilní repr. úplně reducibilní?**

- obecně ne vždy: uvažujme $G = (\mathbb{R}, +)$ a její dvourozm. repr. $D(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left[\text{Jde o repr., neboť } D(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } D(x)D(y) = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D(x+y)\right]$

$\forall$ vektory $\binom{\alpha}{0}$ tvoří ired. inv. podprostor, avšak vektory $\binom{0}{\beta}$, které jsou kolmé na $\binom{\alpha}{0}$, netvoří inv. podprostor, neboť

$$D(x)\binom{0}{\beta} = \binom{\beta x}{\beta} \Rightarrow D(x) \text{ je reducibilní}$$

avšak není úplně reducibilní, protože neexistuje matice S taková, aby $D'(y) = S \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} f(y) & 0 \\ 0 & g(y) \end{pmatrix}$, kde $f(y), g(y)$ jsou nějaké fce y

protože by muselo být $\det D(y) = \det D'(y) \Rightarrow 1 = f(y) g(y)$
$\operatorname{Tr} D(y) = \operatorname{Tr} D'(y) \Rightarrow 2 = f(y) + g(y)$

a tedy $f(y) = g(y) = 1$, což nelze, repr. $D(x)$ není ekvivalentní triviální repr.

- ukazuje se, že význačné jsou tzv. unitární repr., které jsou důležité pro aplikaci ve fyzice a pro které reducibilita již znamená úplnou reducibilitu

Def: Unitární reprezentace grupy G je repr. na vektor. prostoru $\mathcal{H}$ se skalárním součinem $\langle\psi|\varphi\rangle$ (budeme se držet obvyklého fyzikálního značení $\mathcal{H}$ - Hilbertův prostor)

přičemž $\forall g\in G$ je reprezentován unitárním operátorem $U(g)$ pro který platí $U(g)U(g)^\dagger = U(g)^\dagger U(g) = 1$ (kde $U(g)^\dagger$ je hermitovsky sdruž. op.)

neboli platí $\langle U(g)\psi|U(g)\varphi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle$ pro $\forall g\in G$ a $\forall |\varphi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$

(pro ∞-rozměrné $\mathcal{H}$ se navíc požaduje omezenost $U(g)$: $\|U(g)\psi\| \leq M\|\psi\|$ pro $\forall |\psi\rangle\in\mathcal{H}$)

Maticová unitární repr. je matic. repr. $D(g)$, kde $\forall$ matice jsou unitární, tj. $D(g)^{-1} = D(g)^\dagger$

Věta: Každá konečně-rozměrná unitární reducibilní repr. grupy G na $\mathcal{H}$ je úplně reducibilní.

Dk: Nechť $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ je netriviální inv. podprostor při působení G (je takový, neboť jde o reducibilní repr.). Stačí ukázat, že $\mathcal{H}_1^\perp$ (ortogon. doplněk $\mathcal{H}_1$ v $\mathcal{H}$) je invariantní podpr. To je ale přímým důsledkem invariance skalárního součinu při působení G v $\mathcal{H}$ (jde o unit. repr.), neboť je-li $|\psi\rangle\in\mathcal{H}_1^\perp$, tj. $\langle\psi|\varphi\rangle = 0$ pro $\forall\varphi\in\mathcal{H}_1$, pak

$$\langle U(g)\psi|\varphi\rangle = \langle U(g)\psi|U(g)U(g)^{-1}\varphi\rangle = \langle\psi|\overbrace{U(g^{-1})\varphi}^{\in\mathcal{H}_1 \text{ díky invarianci } \mathcal{H}_1}\rangle = 0$$

a tedy $\mathcal{H}_1^\perp$ je také invariantní podpr., protože $U(g)\psi\in\mathcal{H}_1^\perp$ pro $\forall g\in G$.

Pokud $\mathcal{H}_1$, či $\mathcal{H}_1^\perp$ jsou stále reducibilní, pokračujeme v rozkládání.

- na příkladu reduc. repr., která není úplně reduc., jsme viděli, že šlo o neunitární repr. a ani tuto repr. není možné převést podobnostní transf. na unit. (kdyby to šlo, byla by úplně reduc.)
- otázkou je, kdy je neunit. repr. ekvivalentní nějaké unit. repr. a tedy úplně reduc. repr.

  ukazuje se, že tomu tak je vždy pro jisté třídy grup, a to především pro konečné a tzv. kompaktní Lieovy grupy (těmi se budeme blíže zabývat později)

Věta: Každá konečně-rozměrná reducibilní repr. konečné (kompaktní Lieovy) grupy je již nutně úplně reducibilní. (Maschkeův teorém)

Dk: Základní myšlenka: Nechť $T(g)$ není unit. vůči $\langle|\rangle$ na $\mathcal{H}$, pak zkonstruujeme nový skal. součin $\langle\psi|\varphi\rangle' = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\langle T(g)\psi|T(g)\varphi\rangle$, vůči němuž už $T(g)$ je unitární (díky větě o přeuspořádání) a který je ekvivalentní s původním $\langle|\rangle$. (U Lieových grup nutná integrace přes celou grupu $\Rightarrow$ kompaktnost, aby byl integrál konečný)