Schurova lemmata

- někdy se uvádí pouze jedno, druhé je důsledkem pro komplexní konečně-rozměrné reprezentace
- jsou platná nejen pro reprezentace grup, ale též pro repr. Lieových algeber.

1. Lemma

Nechť (ϱ_1, V_1) a (ϱ_2, V_2) jsou ireducibilní reprezentace grupy G.
Nechť S je splétající operátor mezi těmito reprezentacemi, tj.

$$S: V_1 \to V_2 \quad , \quad S\varrho_1(g)\vec{v}_1 = \varrho_2(g) S \vec{v}_1 \quad \text{pro } \forall g \in G$$

Pak je buď $S = 0$ (nulové zobrazení, $S\vec{v} = 0$ pro $\forall \vec{v} \in V_1$)
nebo je S izomorfismus a tedy ϱ_1 a ϱ_2 jsou ekvivalentní repr.

Důkaz: • Jádro $\operatorname{Ker} S$ a obraz $\operatorname{Im} S$ jsou invariantní podprostory při působení G díky tomu, že jde o splétající operátor, neboť

a) je-li $\vec{v} \in \operatorname{Ker} S$ (tj. $S\vec{v} = 0$), pak $S\varrho_1(g)\vec{v} = \varrho_2(g) S\vec{v} = 0$, a tedy
$\varrho_1(g)\vec{v} \in \operatorname{Ker} S$ pro $\forall g \in G$

b) je-li $\vec{w} \in \operatorname{Im} S$, pak $\exists \vec{v} \in V_1 : S\vec{v} = \vec{w}$
a tedy $\varrho_2(g)\vec{w} = \varrho_2(g) S\vec{v} = S\varrho_1(g)\vec{v} = S\vec{v}'$, kde $\vec{v}' \in V_1$
$\Rightarrow \quad \varrho_2(g)\vec{w} \in \operatorname{Im} S$ pro $\forall g \in G$

• Protože V_1 a V_2 jsou ireducibilní $\Rightarrow \operatorname{Ker} S = 0$ nebo $\operatorname{Ker} S = V_1$
a dále $\operatorname{Im} S = 0$ nebo $\operatorname{Im} S = V_2$

Pokud $\operatorname{Im} S = 0 \Rightarrow S = 0$
Pokud $\operatorname{Ker} S = V_1 \Rightarrow S = 0$.
Pokud $\operatorname{Ker} S = 0$ a $\operatorname{Im} S = V_2$, pak S je izomorfismus a
tedy $(\varrho_1, V_1) \simeq (\varrho_2, V_2)$ (jsou ekvivalentní).

2. Lemma: Nechť (ϱ, V) je ireducibilní komplexní konečně-rozměrná repr. grupy G a S je splétající operátor na V, tj. $S: V \to V$, který komutuje se všemi $\varrho(g)$, $g \in G$.
Pak $S = \lambda \mathbb{1}$, kde $\lambda \in \mathbb{C}$, tj. S je násobkem identity.

Důkaz: Nechť $A = S - \lambda\mathbb{1}$, kde λ je řešením $\det(S - \lambda\mathbb{1}) = 0$ (proto potřebujeme komplexní repr a $\dim < \infty$)
pak A je též splétající, ale není invertibilní
$\Rightarrow$ z 1. lemmatu plyne, že $A = 0$, a tedy $S = \lambda\mathbb{1}$.

Důsledky Schurových lemmat

1) Kritérium iredukcibility konečně-~~rozm~~. repr. konečných (a komp. Lieových) grup
- pro tyto grupy je každá konečně-rozm. repr. úplně reducibilní nebo ireduc, pokud je reducibilní, pak každá matice lze převést na tvar $\left(\begin{array}{c|c} \epsilon_1 & 0 \\ \hline 0 & \epsilon_2 \end{array}\right)$ a komutuje s maticemi $\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 \mathbb{1} & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 \mathbb{1} \end{array}\right)$, kde $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\Rightarrow$ Pokud je jedinou maticí, která komutuje se $\forall$ maticemi dané repr., násobkem jednotkové matice, pak jde nutně o ireducibilní reprezentaci.

2) Komplexní konečně-rozm. ireduc. repr. komutativní (abelovské) grupy G jsou jednorozměrné

Dk: Nechť $T(g)$ tvoří repr. abelovské grupy G na prostoru V.
Pak
$$T(g_1)T(g_2) = T(g_2)T(g_1) \quad \text{pro } \forall g_1, g_2 \in G$$
$\Rightarrow$ $T(g_1)$ komutuje se $\forall T(g_2)$ a tedy jde-li o ired. repr., pak dle 2. Schur. lemmatu je $T(g_1) = \lambda(g_1)\mathbb{1}$ pro $\forall g_1 \in G$
$\Rightarrow$ $T(g)$ je reducibilní, ledaže $\dim V = 1$.

Pozn. požadavek komplexnosti je důležitý, jak jsme viděli v Př. působení $SO(2)$ na $\mathbb{R}^3$

3) Relace ortogonality pro maticové ireducibilní komplexní repr.

Nechť $D^\mu(g)$ a $D^\nu(g)$ jsou dvě komplexní ired. matic. repr. konečné (resp. kompaktní Lieovy) grupy. Pak

1) pokud jsou tyto repr. neekvivalentní, pak
$$\sum_{g\in G} D^\mu_{ij}(g^{-1}) D^\nu_{ke}(g) = 0 \qquad \Big(\text{resp. } \int_G D^\mu_{ij}(g^{-1})\, D^\nu_{ke}(g)\, \underset{\text{levoinvariantní míra na } G}{dg} = 0\Big)$$

2) pokud jsou ekvivalentní, pak $\exists S$ taková, že $D^\mu(g) = S^{-1} D^\nu(g) S$
a platí
$$\sum_{g\in G} D^\mu_{ij}(g^{-1}) D^\nu_{ke}(g) = \frac{\#G}{d_\mu} S_{kj} (S^{-1})_{ie} \qquad \Big(\text{resp. obdobně pro komp. Lieovy grupy, } \Sigma \leftrightarrow \int \text{ a } \#G \leftrightarrow V_G\Big)$$

a speciálně pro $\mu = \nu$ máme $S = \mathbb{1}$
a tedy
$$\sum_{g\in G} D^\mu_{ij}(g^{-1}) D^\nu_{ke}(g) = \frac{\#G}{d_\mu} \delta_{kj}\, \delta_{ie}\, \delta_{\mu\nu}$$

3) pokud jsou tyto repr. unitární, pak $D^\mu_{ij}(g^{-1}) = D^\mu_{ji}(g)^*$
a dostaneme pro neekvivalentní, nebo identické ired. repr. vztah

$$\boxed{\sum_{g\in G} D^\mu_{ji}(g)^* D^\nu_{ke}(g) = \frac{\#G}{d_\mu} \delta_{\mu\nu}\, \delta_{jk}\, \delta_{ie}}$$

Dk. Relace ortogonality pro konečné grupy (u kompaktních Lieových grup je pouze nutné použít levoinv. integraci místo sumy přes ∀ prvky grupy)

Nechť B je libovolná matice $d_\mu \times d_\nu$ kde d_μ, resp. d_ν jsou dimenze ired. repr.

Pak matice $A = \sum_g D^\mu(g^{-1})\, B\, D^\nu(g)$ splňuje $D^\mu(h) A = A D^\nu(h)$ pro $\forall h \in G$

neboť $D^\mu(h)A = \sum_g D^\mu(h) D^\mu(g^{-1}) B D^\nu(g) \underset{\uparrow}{=} \sum_{g'} D^\mu(g'^{-1}) B D^\nu(g'h) = A D^\nu(h)$

substituce $g'^{-1} = hg^{-1}$, neboli $g = g'h$ a využití věty o přeuspořádání (při násobení jedním prvkem $h \in G$ všechny prvky grupy G dostaneme opět všechny prvky grupy)

Dále

1) pokud D^μ není ekvivalentní D^ν, pak dle 1. Schurova lemmatu musí být $A = 0$ a vezmeme-li jako B matici, jejíž jediný nenulový prvek je $b_{rs} = 1$, pak

$$0 = \sum_{j,k} \sum_g D^\mu_{ij}(g^{-1}) \underset{\delta_{jr}\delta_{ks}}{\underset{\uparrow}{B_{jk}}} D^\nu_{k\ell}(g) = \sum_g D^\mu_{ir}(g^{-1}) D^\nu_{s\ell}(g) = 0$$

2) pokud $D^\mu = S^{-1} D^\nu S$ (tj. D^μ a D^ν jsou ekvivalentní), pak

$$D^\mu(h) A = A S D^\mu(h) S^{-1}, \text{ neboli } D^\mu(h)\, AS = AS\, D^\mu(h) \quad \text{pro } \forall h \in G$$

a tedy dle 2. Schurova lemmatu $AS = \lambda \mathbb{1}$, neboli $A = \lambda S^{-1}$

Hodnotu λ určíme pomocí stopy výrazu $\lambda\mathbb{1} = AS = \sum_g D^\mu(g^{-1}) BS D^\mu(g) \cancel{S^{-1}S}$,

dostaneme $d_\mu \lambda = \mathrm{Tr}\, \lambda \mathbb{1} = \sum_g \mathrm{Tr}\left[\cancel{D^\mu(g^{-1})} BS \cancel{D^\mu(g)}\right] = \sum_g \mathrm{Tr}\, BS = \#G \sum_{i,j} B_{ij} S_{ji}$

a opět volbou $B_{ij} = \delta_{ir}\delta_{js}$ nakonec $d_\mu \lambda = \#G\, S_{sr}$

a tedy nakonec
$$\lambda (S^{-1})_{i\ell} = A_{i\ell} = \sum_{j,k}\sum_g D^\mu_{ij}(g^{-1}) \underset{\delta_{jr}\delta_{ks}}{\underset{\uparrow}{B_{jk}}} D^\nu_{k\ell}(g) = \sum_g D^\mu_{ir}(g^{-1}) D_{s\ell}(g) = \frac{\#G}{d_\mu} S_{sr} (S^{-1})_{i\ell}$$

což jsme měli dokázat.

Další vztahy jsou již přímočaré dosazení

- Co je vlastně v relacích ortogonality na sebe ortogonální?
  Pokud bychom nalezli maticové vyjádření všech neekvivalentních ired. repr. dané grupy a sestavili vektory typu $(D^\mu_{ij}(g_1), D^\mu_{ij}(g_2), \ldots, D^\mu_{ij}(g_{\#G}))$ byly by právě tyto vekt. na sebe kolmé, tj. každý vektor je určen třemi parametry (μ - čísluje repr., i,j - určují pozici prvku matice D^μ) a složky těchto vektorů jsou číslovány prvky grupy. Jde tedy o $\#G$-rozměrný prostor, kde máme $\sum_\mu d_\mu^2$ ortogonálních vektorů, musí tedy být $\sum_\mu d_\mu^2 \le \#G$
  suma přes ∀ neekv. ired. repr. (později si ukážeme, že platí =)