Charakter reprezentace

- protože mnoho reprezentací je ekvivalentních (především u maticových reprezentací, které dostáváme volbou různých bazí), je vhodné mít nějakou „charakteristiku" těchto tříd ekvivalentních reprezentací
- zavádí se pojem <u>charakter reprezentace</u> pomocí stopy matic, které vyjadřují v určité bázi konečně-rozměrnou repr. grupy G na prostoru V

$$\boxed{\chi(g) = \mathrm{Tr}\, D(g)} = \sum_{i=1}^{d \,\swarrow \dim V} D_{ii}(g)$$

- $\chi(g)$ se nazývá charakter prvku $g \in G$ v reprezentaci $D(g)$ (nebo obecně $(\rho, V) \leftrightarrow D(g)$)

- díky cykličnosti stopy matic, <u>mají ekvivalentní reprezentace stejný charakter</u>, a tedy definice nezávisí na volbě báze

pro $D'(g) = A^{-1} D(g) A$ máme

$$\chi'(g) = \mathrm{Tr}\, D'(g) = \mathrm{Tr}\,(A^{-1} D(g) A) = \mathrm{Tr}\, D(g) = \chi(g)$$

- pozor: stejný charakter dvou reprezentací ještě neznamená ekvivalenci těchto repr.
(později uvidíme, že to platí pro repr. konečných a kompaktních Lieových grup)

Př. $G = (\mathbb{R}, +)$, repr. $D(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ má stejný charakter jako triviální repr. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ale nejsou ekvivalentní

- vlastnosti:
1) pro $g = e$ máme $D(e) = 1\!\!1_{d \times d} \Rightarrow \boxed{\chi(e) = d = \dim V}$
2) <u>charaktery sdružených prvků jsou stejné</u>, pro $g_2 \sim g_1$ bude $\mathrm{Tr}\, D(g_2) = \mathrm{Tr}\, D(h^{-1} g_1 h) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cykličnost stopy}}}{=} \mathrm{Tr}\, D(g_1) = \chi(g_1)$

$\Rightarrow$ tabelují se pouze charaktery tříd sdružených prvků
3) je-li $D(g) = D_1(g) \oplus D_2(g) \oplus \dots \oplus D_r(g)$, pak $\chi(g) = \sum_{i=1}^{r} \chi_i(g)$
(rozklad úplně reduc. repr.)

Relace ortogonality pro charaktery konečných grup

- nechť $\chi^\mu(g)$ a $\chi^\nu(g)$ jsou charaktery dvou ireducibilních reprezentací na komplexních konečně-rozměrných prostorech pro grupu G a nechť jsou neekvivalentní, pokud $\mu \neq \nu$, pak z relací ortogonality

$$\sum_{g\in G} D^\mu_{ij}(g^{-1}) D^\nu_{k\ell}(g) = \frac{\# G}{d_\mu} \delta_{kj} \delta_{i\ell} \delta_{\mu\nu}$$

dostaneme položením $i=j$ a $k=\ell$ a sumací přes i a k

$$\sum_{i,k} \sum_{g\in G} D^\mu_{ii}(g^{-1}) D^\nu_{kk}(g) = \sum_{g\in G} \chi^\mu(g^{-1}) \chi^\nu(g) =$$

$$= \sum_{i,k} \frac{\# G}{d_\mu} \delta_{ki} \delta_{ik} \delta_{\mu\nu} = \frac{\# G}{d_\mu} \sum_i \delta_{ii} \delta_{\mu\nu} = \# G \, \delta_{\mu\nu}$$

a protože je pro konečnou grupu každá reprezentace ekvivalentní nějaké unitární repr., platí

$$\chi(g^{-1}) = \mathrm{Tr}\, D(g^{-1}) = \mathrm{Tr}\, A \underbrace{D^U}_{\text{unitární}}(g^{-1}) A^{-1} = \mathrm{Tr}\, D^U(g)^\dagger = \chi^U(g)^* = \chi(g)^*$$

a tedy

$$\boxed{\sum \chi^\mu(g)^* \chi^\nu(g) = \# G \, \delta_{\mu\nu}}$$

(obdobně pro kompaktní Lieovy grupy: $\int_G \chi^\mu(g)^* \chi^\nu(g) \, d\mu(g) = V_G \delta_{\mu\nu}$)

- protože pro třídy sdružených prvků C_k, $k=1,\dots,N_c$ jsou vždy charaktery stejné, $\chi(C_k) = \chi(g)$ pro lib. $g \in C_k$ můžeme též psát

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N_c} n_k \chi^\mu(C_k)^* \chi^\nu(C_k) = \# G \, \delta_{\mu\nu}}$$

kde $n_k = \# C_k$ je počet prvků grupy G ve třídě C_k

$\Rightarrow$ charaktery neekvivalentních IR tvoří ortogonální systém vektorů v N_c-rozměrném vektorovém prostoru,

a tedy $\#$ neekvivalentních IR $\leq N_c$

(později ukážeme $=$)

Rozklad reducibilních reprezentací na ireducibilní

- pro konečné grupy (a kompaktní LG) je každá konečně-rozměrná repr. úplně reducibilní a ve vhodné bázi bude

$$D(g) = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} D^1(g) & 0 \\ 0 & D^1(g) \end{matrix}\right\}\alpha_1 & & & 0 \\ 0 & \left. D^2(g) \right\}\alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \left. D^{N_r}(g) \right\}\alpha_{N_r} \end{pmatrix}$$

podreprezentace na invariantních ireducibilních podprostorech už musí být ekvivalentní IR dané grupy

kde α_μ značí, kolikrát je v repr. $D(g)$ obsažena IR $D^\mu(g)$

$N_r \leftarrow$ počet IR (neekvivalentních)

a dostáváme $$\chi(g) = \sum_{\mu=1}^{N_r} \alpha_\mu \chi^\mu(g)$$

a pomocí relací ortogonality dostaneme

$$\sum_{g\in G} \chi^\nu(g)^* \chi(g) = \sum_{\mu=1}^{N_r} \alpha_\mu \sum_{g\in G} \chi^\nu(g)^* \chi^\mu(g) = \alpha_\nu \#G$$

a tedy $$\boxed{\alpha_\mu = \frac{1}{\#G} \sum_{g\in G} \chi^\mu(g)^* \chi(g) = \frac{1}{\#G} \sum_{k=1}^{N_c} n_k \chi^\mu(C_k)^* \chi(C_k)}$$

- stačí tedy znát charaktery tříd sdružených prvků
- α_μ může být nulové, pokud v dané reduc. repr. není repr. $D^\mu(g)$ obsažena
- rozklad reduc. repr. na IR je jednoznačný (až na přeuspořádání)

Frobeniovo kritérium ireducibility

- spočtěme $$\sum_{g\in G} \chi(g)^* \chi(g) = \sum_{g\in G} \sum_{\mu,\nu} \alpha_\mu \alpha_\nu \chi^\mu(g)^* \chi^\nu(g) = \#G \sum_\mu \alpha_\mu^2$$
- pokud je $D(g)$ ireducibilní, pak $\chi(g) = 1 \cdot \chi^\mu(g)$ pro určité μ $\left(\begin{matrix}\alpha_\mu = 1 \\ \alpha_\nu = 0, \nu\neq\mu\end{matrix}\right)$

  a tedy $\sum_\mu \alpha_\mu^2 = 1$

  ovšem pro reducibilní repr. budou alespoň dvě α_μ nenulové

  a tedy $\sum_\mu \alpha_\mu^2 > 1$,
- dostáváme $$\boxed{\sum_{g\in G} \chi(g)^* \chi(g) = \#G \iff D(g) \text{ je ireducibilní}}$$

Ekvivalence reprezentací, právě když mají stejný charakter

pro konečné a kompaktní Lieovy grupy

Dk: $\Rightarrow$ triviální (viz výše)

$\Leftarrow$ Nechť $\chi(g)$ a $\chi'(g)$ jsou charaktery dvou repr.

a nechť $\chi(g) = \chi'(g)$, pak

1) pokud jsou ireducibilní a nebyly by ekvivalentní

pak by platilo

$$\sum_{g\in G} \chi'(g)^* \chi(g) = 0 \quad \text{, ale zároveň} \quad \sum_{g\in G} \chi(g)^* \chi(g) = \# G$$

což je spor pro $\chi(g) = \chi'(g)$

2) pokud jsou reducibilní, pak jsou úplně reducibilní

a dostaneme pro $\forall g \in G$ z rovnosti $\chi(g)$ a $\chi'(g)$

$$\left.\begin{aligned} \chi(g) &= \sum_{\mu=1}^{N_r} \alpha_\mu \chi^\mu(g) \\ \chi'(g) &= \sum_{\mu=1}^{N_r} \alpha'_\mu \chi^\mu(g) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{\mu=1}^{N_r} (\alpha_\mu - \alpha'_\mu)\, \chi^\mu(g) = 0$$

a pomocí relací ortogonality

$$0 = \sum_{\mu=1}^{N_r} (\alpha_\mu - \alpha'_\mu) \sum_{g\in G} \chi^\nu(g)^* \chi^\mu(g) = \# G \sum_{\mu=1}^{N_r} (\alpha_\mu - \alpha'_\mu)\, \delta_{\mu\nu} =$$

$$= \# G\, (\alpha_\nu - \alpha'_\nu)$$

a tedy $\alpha_\nu = \alpha'_\nu$

- oba rozklady obsahují stejné IR (až na ekvivalenci)

a jsou tedy ekvivalentní