Ireducibilní reprezentace konečných grup

Přehled výsledků:

1) počet IR (neekvivalentních) $\boxed{N_r = N_c}$ ← počet tříd sdružených prvků $\left(\begin{array}{c}\text{zatím ukázáno} \\ N_r \leq N_c\end{array}\right)$

2) dimenze IR: $\boxed{\sum d_\mu^2 = \# G}$ ← počet prvků grupy $\left(\begin{array}{c}\text{zatím} \\ \leq\end{array}\right)$

relace ortogonality:

3) suma přes třídy → $\sum_{k=1}^{N_c} n_k \chi^\mu(c_k)^* \chi^\nu(c_k) = \# G\, \delta_{\mu\nu}$ (již dokázáno)

4) suma přes IR → $\sum_{\alpha=1}^{N_r} \chi^\alpha(c_i)^* \chi^\alpha(c_j) = \frac{\# G}{n_i} \delta_{ij}$ (zatím nedokázáno)

Důkaz 1) z 4): N_c kolmých vektorů v N_r-rozměrném prostoru ⇒ $N_c \leq N_r$

Důkaz 2): Pomocí regulární reprezentace grupy G

- označme $n = \# G$ a prvky $g_1, \dots, g_n \in G$
- matice $n \times n$
$$D^{reg}(g_s)_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } g_s g_l = g_k \\ 0 & \text{pokud } g_s g_l \neq g_k \end{cases}$$
tvoří regulární repr.

Př:

	e	a	b
$g_1 = e$	e	a	b
$g_2 = a$	a	b	e
$g_3 = b$	b	e	a

$$\Rightarrow D^{reg}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^{reg}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{reg}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- jde vskutku o reprezentaci:
$$D^{reg}(e) = \mathbb{1}_{n \times n} \quad \text{neboť} \quad D^{reg}(g_s)_{kk} = \begin{cases} 1 & \text{pro } g_s g_k = g_k \Rightarrow g_s = e \\ 0 & \text{pro } g_s \neq e \end{cases}$$
$$\sum_{l=1}^{n} \underbrace{D^{reg}(g_r)_{kl}}_{\substack{\text{je 1 pro} \\ g_r g_l = g_k}} \underbrace{D^{reg}(g_s)_{lm}}_{\substack{\text{je 1 pro} \\ g_s g_m = g_l}} \stackrel{?}{=} D^{reg}(g_r g_s)_{km}$$
$\Rightarrow$ je 1 pro $g_r(g_s g_m) = g_k$, což odpovídá definici

- charakter: $\chi^{reg}(g_s) = \begin{cases} \# G & \text{pro } g_s = e \\ 0 & \text{pro } g_s \neq e \end{cases}$

- kolikrát je IR Γ^μ obsažena v této reducibilní repr.?
$$\alpha_\mu^{reg} = \frac{1}{\# G} \sum_{g \in G} \chi^{reg}(g)^* \chi^\mu(g) = \frac{1}{\# G} \chi^{reg}(e)^* \chi^\mu(e) = d_\mu$$
a tedy
$$\dim D^{reg} = \boxed{\# G = \sum_\mu d_\mu^2}$$

Důkaz 4): pomocí násobení tříd $C_i C_j = \sum_{k=1}^{N_c} c_{ij}^k C_k$

kde c_{ij}^k jsou konstanty tříd (viz poznámky ke grupám)

a z toho plynoucího vztahu

$$(*) \qquad n_i n_j \chi^\alpha(C_i)\chi^\alpha(C_j) = d_\alpha \sum_{k=1}^{N_c} c_{ij}^k n_k \chi^\alpha(C_k) \quad \text{pro lib. IR } \Gamma^\alpha$$

který lze dokázat následovně:

1) protože platí $gC_k = C_k g$ pro $\forall g \in G$

pak zavedením $A_k = \sum_{h \in C_k} D^\alpha(h)$ suma matic, které reprezentují prvky $h \in C_k$

dostaneme $D^\alpha(g) A_k = A_k D^\alpha(g)$ pro $\forall g \in G$

(neplatí však obecně $D^\alpha(g) D^\alpha(h) = D^\alpha(h) D^\alpha(g)$ pro $h \in C_k$)

a z 2. Schurova lemmatu plyne, že (D^α je IR)

$$A_k = \lambda_k \mathbb{1}$$

a λ_k se určí pomocí stopy

$$\mathrm{Tr}\, A_k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{z definice } A_k}}{=} n_k \chi^\alpha(C_k) = \lambda_k \mathrm{Tr}\, \mathbb{1} = \lambda_k d_\alpha \Rightarrow \lambda_k = \frac{n_k \chi^\alpha(C_k)}{d_\alpha}$$

2) z $C_i C_j = \sum_{k=1}^{N_c} c_{ij}^k C_k$ plyne $A_i A_j = \sum_{k=1}^{N_c} c_{ij}^k A_k$

a dosazením za $A_k = \lambda_k \mathbb{1}$ dostaneme (*).

- nyní sumou (*) přes všechny IR dostaneme

$$n_i n_j \sum_{\alpha=1}^{N_r} \chi^\alpha(C_i)\chi^\alpha(C_j) = \sum_{k=1}^{N_c} c_{ij}^k n_k \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N_r} d_\alpha \chi^\alpha(C_k)}_{\substack{\chi^{reg}(C_k) = \delta_{k1} \#G \\ \text{pokud } C_1 = (E)}}$$

$$= c_{ij}^1 \#G$$

- protože však $c_{ij}^1 = n_i \delta_{ij'}$, kde index j' označuje třídu $C_{j'}$, která je složená z inverzních prvků k těm, které jsou ve třídě C_j - můžou být stejné ($C_j = C_{j'}$), ale obecně různé, avšak vždy $n_j = n_{j'}$ a $\chi^\alpha(C_{j'}) = \chi^\alpha(C_j)^*$ díky ekvivalenci s unitární repr. a díky tomu, že pokud $a \sim b$ pak $a^{-1} \sim b^{-1}$ (pomocí stejného prvku)

- dostáváme

$$\cancel{n_i} n_{j'} \sum_{\alpha=1}^{N_r} \chi^\alpha(C_i)\chi^\alpha(C_{j'})^* = \cancel{n_i} \delta_{ij'} \#G$$

a přeznačením a vydělením n_j máme 4)