Přímý součin dvou reprezentací

- nechť grupa G působí na vektorových prostorech $V^{(1)}$ a $V^{(2)}$ s bázemi $\{\vec{e}^{(1)}_j\}_{j=1}^{n_1=\dim V^{(1)}}$ a $\{\vec{e}^{(2)}_\ell\}_{\ell=1}^{n_2=\dim V^{(2)}}$ pomocí

$$T^{(1)}(g)\,\vec{e}^{(1)}_j = \sum_{i=1}^{n_1} \vec{e}^{(1)}_i D^{(1)}_{ij}(g) \quad \text{a} \quad T^{(2)}(g)\,\vec{e}^{(2)}_\ell = \sum_{k=1}^{n_2} \vec{e}^{(2)}_k D^{(2)}_{k\ell}(g)$$

neboli máme dvě (obecně reducibilní) repr. $\Gamma^{(1)}$ a $\Gamma^{(2)}$.

- pak grupa G působí též na tenzorovém součinu $V^{(1)}\otimes V^{(2)}$ s bází $\vec{e}^{(1)}_j \otimes \vec{e}^{(2)}_\ell$ pomocí

$$\left[T^{(1)}(g)\otimes T^{(2)}(g)\right] \vec{e}^{(1)}_j\otimes\vec{e}^{(2)}_\ell = \sum_{i,k} \vec{e}^{(1)}_i \otimes \vec{e}^{(2)}_k \underbrace{D^{(1)}_{ij}(g)\, D^{(2)}_{k\ell}(g)}_{D^{(1)\otimes(2)}_{ik,j\ell}(g)}$$

kde matice $D^{(1)\otimes(2)}(g)$ je přímým součinem matic

$$D^{(1)\otimes(2)}(g) = D^{(1)}(g)\otimes D^{(2)}(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}_{11}(g)D^{(2)}(g) & D^{(1)}_{12}(g)D^{(2)}(g) & \cdots \\ D^{(1)}_{21}(g)D^{(2)}(g) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & D^{(1)}_{n_1n_1}(g)D^{(2)}(g) \end{pmatrix}$$

přičemž báze ve $V^{(1)}\otimes V^{(2)}$ je řazena postupně

$$\vec{e}^{(1)}_1\otimes\vec{e}^{(2)}_1,\ \vec{e}^{(1)}_1\otimes\vec{e}^{(2)}_2,\ \dots,\ \vec{e}^{(1)}_2\otimes\vec{e}^{(2)}_1,\ \dots,\ \vec{e}^{(1)}_{n_1}\otimes\vec{e}^{(2)}_{n_2}$$

- protože obecně pro lib. A, B, A', B' platí

$$(A\otimes B)(A'\otimes B') = (AA')\otimes(BB')$$

bude i

$$D^{(1)\otimes(2)}_{ik,j\ell}(g_1 g_2) = \sum_{r,s} D^{(1)\otimes(2)}_{ik,rs}(g_1)\, D^{(1)\otimes(2)}_{rs,j\ell}(g_2)$$

a jde tedy o reprezentaci grupy G $\Gamma^{(1)}\otimes\Gamma^{(2)}$ dimenze $n_1 n_2$.

- její charakter je dán jednoduše

$$\chi^{(1)\otimes(2)}(g) = \sum_{i,k} D^{(1)\otimes(2)}_{ik,ik}(g) = \sum_{i=1}^{n_1} D^{(1)}_{ii}(g) \sum_{k=1}^{n_2} D^{(2)}_{kk}(g) = \chi^{(1)}(g)\cdot\chi^{(2)}(g)$$

- jde obecně o reducibilní reprezentaci ⇒ rozklad na IR a v případě přímého součinu dvou ireducibilních repr. se rozklad nazývá Clebschovou-Gordonovou řadou (viz později)

- ve složkách dostaneme (pro $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n_1} x_j \vec{e}_j^{(1)}$ a $\vec{y} = \sum_{\ell=1}^{n_2} y_\ell \vec{e}_\ell^{(2)}$)

$$T^{(1)}(g) \otimes T^{(2)}(g) \, (\vec{x} \otimes \vec{y}) = \sum_{j,\ell} x_j y_\ell \sum_{i=1}^{n_1} \vec{e}_i^{(1)} D^{(1)}_{ij}(g) \sum_{k=1}^{n_2} \vec{e}^{(2)}_k D^{(2)}_{k\ell}(g) =$$

$$= \sum x'_i y'_k \left(\vec{e}_i^{(1)} \otimes \vec{e}^{(2)}_k \right)$$

a tedy
$$x'_i y'_k = \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{\ell=1}^{n_2} D^{(1)}_{ij}(g) D^{(2)}_{k\ell}(g) x_j y_\ell = \sum_{j,\ell} D^{(1\otimes 2)}_{ik,j\ell}(g) x_j y_\ell$$

- rozklad na symetrickou a antisymetrickou část pro $\Gamma^{(1)} = \Gamma^{(2)} = \Gamma$

- pokud máme jedinou reprezentaci Γ, pak lze obecně přímý součin $\Gamma \otimes \Gamma$ rozložit na symetrickou část $[\Gamma \otimes \Gamma]$ a antisymetrickou část $\{\Gamma \otimes \Gamma\}$, tj.

$$\Gamma \otimes \Gamma = [\Gamma \otimes \Gamma] \oplus \{\Gamma \otimes \Gamma\}$$

- ve složkách můžeme psát (obdobně bychom mohli vše napsat v bázi)

$$x'_i y'_k = \sum_{j,\ell} D_{ij}(g) D_{k\ell}(g) x_j y_\ell \overset{\text{jen přeznačení indexů}}{=} \sum_{\ell,j} D_{i\ell}(g) D_{kj}(g) x_\ell y_j$$

$$x'_k y'_i = \sum_{j,\ell} D_{kj}(g) D_{i\ell}(g) x_j y_\ell = \sum_{\ell,j} D_{k\ell}(g) D_{ij}(g) x_\ell y_j$$

- sečtením všech čtyř členů dostaneme symetrickou podreprezentaci

$$x'_i y'_k + x'_k y'_i = \sum_{j,\ell} \overset{\text{pravou stranu máme 2x}}{\underbrace{\tfrac{1}{2}\left[D_{ij}(g) D_{k\ell}(g) + D_{i\ell}(g) D_{kj}(g) \right]}_{\text{matice reprezentující } [\Gamma\otimes\Gamma]}} (x_j y_\ell + x_\ell y_j)$$

jejíž dimenze je $\frac{1}{2} d(d+1)$, kde d je dimenze původní Γ

a charakter je $\chi^{[\Gamma\otimes\Gamma]}(g) = \frac{1}{2}\left[\chi(g)^2 + \chi(g^2) \right]$ $\left(\text{a tedy } \chi^{[\Gamma\otimes\Gamma]}(e) = \frac{1}{2}(d^2 + d) = \text{dimenze} \right)$

neboť položením $i=j$ a $k=\ell$ v druhém členu dostaneme součin matic $D(g) \cdot D(g) = D(g^2)$ a pak spočteme stopu

- odečtením dostaneme antisymetrickou podreprezentaci

$$x'_i y'_k - x'_k y'_i = \sum_{j,\ell} \tfrac{1}{2}\left[D_{ij}(g) D_{k\ell}(g) - D_{i\ell}(g) D_{kj}(g) \right] (x_j y_\ell - x_\ell y_j)$$

s dimenzí $\frac{1}{2} d(d-1)$ a charakterem

$$\chi^{\{\Gamma\otimes\Gamma\}}(g) = \frac{1}{2}\left[\chi(g)^2 - \chi(g^2) \right] \quad \left(\text{a tedy } \chi^{\{\Gamma\otimes\Gamma\}}(e) = \frac{1}{2}(d^2 - d) = \text{dimenze} \right)$$