Příklad: přímý součin vektorové reprezentace pro grupu D_{3h} a přiřazení funkcí x^2, y^2, z^2, xy, xz a yz do jejich IR

- již víme, že charaktery vlastních rotací C_φ a nevlastních rotací S_φ ve vektorové repr. (působení na $\mathbb{R}^3$ grupy $O(3)$) jsou obecně

$$\chi^V(C_\varphi) = 1 + 2\cos\varphi \quad \text{a} \quad \chi^V(S_\varphi) = -1 + 2\cos\varphi$$

- charakter přímé součinu nějaké repr. sama se sebou je dán jednoduše

$$\chi^{V\otimes V}(C_\varphi) = \chi^V(C_\varphi)^2 = (1+2\cos\varphi)^2$$
$$\chi^{V\otimes V}(S_\varphi) = \chi^V(S_\varphi)^2 = (-1+2\cos\varphi)^2$$

a tedy pro zrcadlení obecně $\chi^V(\sigma = S_{2\pi}) = 1 = \chi^{V\otimes V}(\sigma)$

a dále $\chi^V(C_3) = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{3} = 0$, $\chi^V(C_2) = 1 + 2\cos\pi = -1$

a $\chi^V(S_3) = -1 + 2\cos\frac{2\pi}{3} = -2$, z čehož určíme $\chi^{V\otimes V}$

	D_{3h}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$	σ_h	$2S_3$	$3C_2$
	Γ^V	3	0	1	1	-2	-1
na druhou	$\Gamma^{V\otimes V}$	9	0	1	1	4	1

- reprezentace $\Gamma^{V\otimes V}$ se rozpadá na symetrickou a antisymetrickou část $\Gamma^{V\otimes V} = \Gamma^{[V\otimes V]} \oplus \Gamma^{\{V\otimes V\}}$, jejichž charaktery jsou dány pomocí

$$\chi^{[V\otimes V]}(g) = \frac{1}{2}\left[\chi^V(g)^2 + \chi^V(g^2)\right] \quad \text{a} \quad \chi^{\{V\otimes V\}}(g) = \frac{1}{2}\left[\chi^V(g)^2 - \chi^V(g^2)\right]$$

a tedy
$$\chi^{[V\otimes V]}(C_\varphi) = \frac{1}{2}\left[(1+2\cos\varphi)^2 + 1 + 2\cos2\varphi\right] = 2\cos\varphi\,(1+2\cos\varphi)$$
$$\chi^{[V\otimes V]}(S_\varphi) = \frac{1}{2}\left[(-1+2\cos\varphi)^2 + 1 + 2\cos2\varphi\right] = 2\cos\varphi\,(-1+2\cos\varphi)$$

a
$$\chi^{\{V\otimes V\}}(C_\varphi) = \frac{1}{2}\left[(1+2\cos\varphi)^2 - (1+2\cos2\varphi)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[4\cos\varphi + 4\cos^2\varphi - 2(-1+2\cos^2\varphi)\right] = 1 + 2\cos\varphi = \chi^{PV}(C_\varphi)$$
$$\chi^{\{V\otimes V\}}(S_\varphi) = \frac{1}{2}\left[(-1+2\cos\varphi)^2 - (1+2\cos2\varphi)\right] = 1 - 2\cos\varphi = \chi^{PV}(S_\varphi)$$

a tedy antisymetrická podreprezentace repr. $\Gamma^{V\otimes V}$ je stejná jako pseudovektorová repr.

- nakonec tedy dostaneme rozklady

D_{3h}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$	σ_h	$2S_3$	$3C_2$	viz dříve D_{3h}	viz dříve C_{3v}	viz níže D_{3h}	viz níže C_{3v}
A_1'	1	1	1	1	1	1		z	z^2, x^2+y^2	z^2, x^2+y^2
A_2'	1	1	−1	1	1	−1	R_z	R_z		
E'	2	−1	0	2	−1	0	(x,y)	$(x,y), (R_x,R_y)$	(xy, x^2-y^2)	$(xz, yz), (xy, x^2-y^2)$
A_1''	1	1	−1	−1	−1	1				
A_2''	1	1	1	−1	−1	−1	z			
E''	2	−1	0	−2	1	0	(R_x,R_y)		(xz,yz)	

	E	$2C_3$	$3\sigma_v$	σ_h	$2S_3$	$3C_2$	
Γ^v	3	0	1	1	−2	−1	$= E' \oplus A_2''$ → (x,y) a z
nadruhou $\Gamma^{v\otimes v}$	9	0	1	1	4	1	$= \Gamma^{[v\otimes v]} \oplus \Gamma^{\{v\otimes v\}}$
$\Gamma^{[v\times v]}$	6	0	2	2	2	2	$= 2A_1' \oplus E' \oplus E''$ → x^2, y^2, z^2, xy, xz a yz
+ $\Gamma^{\{v\times v\}}$	3	0	−1	−1	2	−1	$= A_2' \oplus E''$ → R_x, R_y a R_z

a tedy $\Gamma^{v\otimes v} = 2A_1' \oplus A_2' \oplus E' \oplus 2E''$

- přiřazení x^2, y^2, z^2, xy, yz a xz do IR grupy D_{3h}
  - asi nejefektivnější je dívat se na tyto funkce jako na složky tenzorového součinu $\vec{x} \otimes \vec{x}$, kde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
  - víme totiž, jak se transformuje $\vec{x}$ při působení bodové grupy $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = D^v(g) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, kde $D^v(g)$ reprezentuje g ve vektorové reprezentaci

    a tedy např. dostaneme
    $$x'x' = x'^2 = \left(D^v_{11}(g)\,x + D^v_{12}(g)\,y + D^v_{13}(g)\,z\right)^2$$
    apod. pro $x'y'$, $x'z'$ atd. a podle výsledků pak vidíme, které složky tenzoru $\vec{x} \otimes \vec{x}$ se míchají mezi sebou (jde o symetrický tenzor; x^2, y^2, z^2, xy, yz a xz tedy budou patřit do repr. $\Gamma^{[v\otimes v]}$, jejíž rozklad známe $(2A_1' \oplus E' \oplus E'')$ a hledáme tedy kombinace které jsou bodově invariantní, nebo tvoří dvojice)
- protože obecně $D^v(g)$ jsou ortogonální matice pro všechny bodové grupy, neboť se při působení $O(3)$ a podgrup zachovává velikost $\vec{x}$, bude $x^2+y^2+z^2$ vždy patřit do úplně symetrické repr., u D_{3h} tedy do A_1'

- pokud má navíc bodová grupa jedinou význačnou osu C_n, kterou můžeme vždy umístit do osy z, pak i z^2 a x^2+y^2 budou nezávislé invarianty a tedy x^2+y^2 a z^2 patří u D_{3h} obě do A_1', nejen jejich součet

- zbývá nám přiřadit xy, yz, xz a x^2-y^2 (ortogonální doplněk x^2+y^2) do E' nebo E''
  - protože se (x,y) transformují při působení D_{3h} mezi sebou, ale z se transformuje nezávisle, bude jednu dvojici tvořit xz a yz. Protože jsou charaktery E' a E'' pro E, C_3 a σ_v stejné, musíme se podívat, jak se xz a yz transformují

    např. při σ_h, kdy

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ \text{a } z' &= -z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x'z' &= -xz \\ y'z' &= -yz \end{aligned} \quad \text{neboli} \quad \begin{pmatrix} x'z' \\ y'z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D(\sigma_h)} \begin{pmatrix} xz \\ yz \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \chi(\sigma_h) = -2 \Rightarrow E''$$

neboli (xz, yz) patří do E''

- konečně xy a x^2-y^2 se též transformují mezi sebou,

    např. při C_3, kdy

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\tfrac{1}{2}x - \tfrac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}x - \tfrac{1}{2}y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'y' \\ x'^2-y'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xy \\ x^2-y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi(C_3) = -1$$

$\Downarrow$ z tohoto nevíme zda E' nebo E''

ovšem při σ_h bude

$$\left.\begin{aligned} x'y' &= xy \\ x'^2-y'^2 &= x^2-y^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \chi(\sigma_h) = 2 \Rightarrow E'$$

a tedy (xy, x^2-y^2) patří do IR E'

- můžete si případně ověřit, že i pro S_3 či C_2 dostaneme také odpovídající charaktery