Symetrizační (též projekční) operátory pro konečné grupy

- pokud popisujeme systém, který má určitou grupu symetrie G, v bázi, která je obecná a „nerespektuje" působení této grupy, tj. mixuje bázové vektory (funkce) z různých invariantních podprostorů, je vhodné ~~mít~~ nějaký nástroj, který by umožnil zkonstruovat „symetrizovanou" bázi, tedy takovou, kde už jednotlivé bázové vektory budou spadat do jednotlivých invariantních podprostorů, které odpovídají příslušné ireducibilní repr. grupy Γ
- toto lze docílit pomocí symetrizačních operátorů
- uvažujme neprve ~~v~~ prostoru V, kde působí grupa G, invariantní podprostor $W \subset V$, který přísluší určité IR Γ^μ grupy G, tj. pro bázi $\{\vec{e}_i^{\,\mu}\}_{i=1}^{d_\mu} \in W$ bude platit

$$\underbrace{T(g)}\,\vec{e}_i^{\,\mu} = \sum_{k=1}^{d_\mu} \vec{e}_k^{\,\mu} D_{ki}^{\mu}(g) \qquad (*)$$

(operátor repr. G na prostoru V, při působení na W zůstává výsledek ve W)

- pozn. k terminologii: říkáme, že $\vec{e}_i^{\,\mu}$ patří k i-tému sloupci reprezentace Γ^μ a $\vec{e}_i^{\,\mu}$ tvoří bázi této reprezentace
- ze vztahu $(*)$ lze vytušit, že působením $T(g)$ na prvky ~~báze~~ báze by mělo jít zkonstruovat ostatní prvky báze
  - s využitím relací ortogonality pro $D^\mu(g)$ dostaneme pro unitární repr.

$$\sum_{g\in G} D_{rs}^{\mu}(g)^{*}\, T(g)\, \vec{e}_i^{\,\mu} = \sum_{k=1}^{d_\mu} \sum_{g\in G} D_{rs}^{\mu}(g)^{*} D_{ki}^{\mu}(g)\, \vec{e}_k^{\,\mu} =$$

$$= \sum_{k=1}^{d_\mu} \frac{\#G}{d_\mu} \delta_{rk}\delta_{si}\, \vec{e}_k^{\,\mu} = \frac{\#G}{d_\mu} \delta_{si}\, \vec{e}_r^{\,\mu}$$

neboli pro $s=i$ máme

$$\vec{e}_r^{\,\mu} = \frac{d_\mu}{\#G} \sum_{g\in G} D_{ri}^{\mu}(g)^{*}\, T(g)\, \vec{e}_i^{\,\mu} = P_{ri}^{\mu}\, \vec{e}_i^{\,\mu}$$

kde jsme označili $P_{rs}^{\mu} = \dfrac{d_\mu}{\#G} \sum_{g\in G} D_{rs}^{\mu}(g)^{*}\, T(g)$ <u>symetrizační operátor</u>

a obecně $P_{rs}^{\mu}\, \vec{e}_i^{\,\mu} = \delta_{si}\, \vec{e}_r^{\,\mu}$

- všimněme si, že obecně nejde o projekční operátor, neboť např. $P_{12}^{\mu}\vec{e}_2^{\mu} = \vec{e}_1^{\mu}$, ale $P_{12}^{\mu}\vec{e}_1^{\mu} = 0$ proto je lépe je nazývat symetrizační operátory
- co dostaneme, zapůsobíme-li operátorem P_{jk}^{μ} na obecný vektor $\vec{v}$?

$$P_{jk}^{\mu}\vec{v} = \frac{d_\mu}{\#G}\sum_g D_{jk}^{\mu}(g)^* T(g)\vec{v} = \vec{v}_{jk}^{\mu}$$

- pokud jsou tyto vektory nenulové pro jisté k, pak vektory $\{\vec{v}_{jk}^{\mu}\}_{j=1}^{d_\mu}$ tvoří bázi IR Γ^{μ} v podprostoru $\mathcal{L}(\{\vec{v}_{jk}^{\mu}\}_{j=1}^{d_\mu}) = W^{\mu}$, neboť

$$T(h)\vec{v}_{jk}^{\mu} = \frac{d_\mu}{\#G}\sum_{g\in G} D_{jk}^{\mu}(g)^* \underbrace{T(h)T(g)}_{T(hg)}\vec{v} =$$

substituce $g = h^{-1}g'$ existuje jednoznačně

$$= \frac{d_\mu}{\#G}\sum_{g'\in G} D_{jk}^{\mu}(h^{-1}g')^* T(g')\vec{v} =$$

$$= \frac{d_\mu}{\#G}\sum_{g'\in G}\sum_{r=1}^{d_\mu} D_{jr}^{\mu}(h^{-1})^* D_{rk}^{\mu}(g')^* T(g')\vec{v} =$$

$$= \sum_{r=1}^{d_\mu} D_{jr}^{\mu}(h^{-1})^* \vec{v}_{rk}^{\mu} \underset{\text{unitarita } D^{\mu}}{=} \sum_{r=1}^{d_\mu} D_{rj}^{\mu}(h)\vec{v}_{rk}^{\mu}$$

lineární kombinace přes index r jak by mělo být u báze IR Γ^{μ}

- dostáváme tak celou bázi W^{μ} z jediného vektoru $\vec{v}\in V$, ovšem $\vec{v}$ musí obsahovat příspěvek z W^{μ}, jinak bychom dostali nuly
- ovšem museli bychom znát obecně $D^{\mu}(g)$, ale obvykle jsou tabelovány pouze charaktery IR příslušné grupy, proto se zavádí <u>neúplné symetrizační operátory</u> (již projekční)

$$P^{\mu} = \sum_{j=1}^{d_\mu} P_{jj}^{\mu} = \sum_{j=1}^{d_\mu}\sum_{g\in G}\frac{d_\mu}{\#G} D_{jj}^{\mu}(g)^* T(g) = \frac{d_\mu}{\#G}\sum_{g\in G}\chi^{\mu}(g)^* T(g),$$

- nyní ovšem nekonstruujeme přímo bázi, ale jen vektory z W^{μ}:

$$P^{\mu}\vec{v} = \sum_{j=1}^{d_\mu}\vec{v}_{jj}^{\mu}$$

a je tedy nutno působit na různé vektory $\vec{v}\in V$ a ortogonalizovat