Symetrická grupa S_n

- neboli grupa permutací n-prvkové množiny, jejíž prvky uspořádáme do přihrádek očíslovaných $1, \dots, n$ a přemístění prvků zapíšeme jako $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$, tj. prvek z 1. přihrádky se přesune do přihr. p_1 atd.

- jednotkový prvek = identita (žádné přemístění)

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

inverzní prvek k $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ je $g^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}$, $g^{-1}g = gg^{-1} = e$

neboť složením dvou permutací

$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ a $g_2 = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_n \\ q_1 & \dots & q_n \end{pmatrix}$ dostaneme též permutaci $g_2 g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}$

[zde využíváme toho, že nezáleží na pořadí sloupců, např. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$]

- <u>řád grupy</u> je $n!$ (kolika způsoby lze n prvků rozdělit do n přihrádek)

- kromě mnoha aplikací je S_n významná též díky <u>Cayleyho teorému</u>: Každá konečná grupa řádu n je izomorfní nějaké podgrupě symetrické grupy S_n

  [každému $h \in G$ (řádu n) přiřadíme permutaci $\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_n \\ hg_1 & hg_2 & \dots & hg_n \end{pmatrix}$] (viz věta o přeuspořádání)

  - v praxi je ale snažší zabývat se každou grupou zvlášť, než vycházet z S_n

- <u>cykly</u> – každá permutace se skládá z tzv. cyklů = uzavřených řetězců výměn prvků

  např. $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ obsahuje cykly $(1 \to 2 \to 4 \to 1) = (124)$, $(3 \to 6 \to 3) = (36)$ a (5)

  tj. g lze zapsat též takto $g = (124)(36)(5)$

  ale též jako $g = (241)(36)$, $g = (63)(124)$ apod.

  jednocykly jako (5) se vynechávají

  tj. nezáleží na pořadí cyklů (obecně pokud neobsahují stejná čísla!) ani na tom, kterým číslem cyklus začíná

- **transpozice** = permutace obsahující jen jeden cyklus délky 2 a jinak samé jednocykly, tj. $g=(i\,j)$
  - každý cyklus (a tedy i permutaci) lze vyjádřit jako součin transpozic, např. $(1\,2\,\dots\,n) = \underbrace{(1\,n)\dots(1\,3)(1\,2)}_{\text{zde záleží na pořadí}}$

    obecně cyklus délky n lze rozložit na $n-1$ transpozic

- **sudá permutace** – lze-li rozložit na sudý počet transpozic

  lichá permutace – ——"—— na lichý ——"——

[jde o dobrou definici, neboť určitá permutace se vždy rozloží na sudý počet transpozic, kdežto jiná vždy na lichý, toto lze vidět např. působením na polynom v prom. $x_1,\dots,x_n$

$$p(x_1,\dots,x_n) = \prod_{\substack{i<j\\ i,j=1}}^{n} (x_i - x_j) = \det V = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

tzv. Vandermondeho matice

transpozici odpovídá výměna řádků $\rightarrow$ změna znaménka $\det V$]

- alternující grupa $A_n \subset S_n$ = grupa všech sudých permutací řádu $\frac{n!}{2}$

- **třídy sdružených prvků** – jednu třídu vždy tvoří permutace které mají stejnou strukturu cyklů, tj. obsahují <u>stejný počet stejně dlouhých cyklů</u>

neboť pro $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ a $h = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ q_1 & \dots & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_n \\ q_{p_1} & \dots & q_{p_n} \end{pmatrix}$

dostaneme $h^{-1} = \begin{pmatrix} q_1 & \dots & q_n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}$ a tedy $hgh^{-1} = \begin{pmatrix} q_1 & \dots & q_n \\ q_{p_1} & \dots & q_{p_n} \end{pmatrix}$

neboli permutujeme podle h jak horní řádek, tak dolní

$\rightarrow$ v cyklech se permutují prvky, ale jejich délka zůstane

př. $g = (1\,2)(3\,4\,5)$ $\quad h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

$$hgh^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (3\,4)(1\,5\,2)$$

z $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

- další pravidla pro skládání cyklů

1) $(a \dots b\, c\, d \dots e) = (a \dots b\, c)(c\, d \dots e)$ (rozklad, nebo složení cyklů)

neboť jde o součin

$$\begin{pmatrix} a \dots b\, d \dots e\, c \\ b \dots b\, c\, d \dots e\, a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \dots b\, c\, d \dots e \\ a \dots b\, d \dots e\, c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \dots b\, c\, d \dots e \\ \dots b\, c\, d \dots e\, a \end{pmatrix}$$

2) $(a\,b)(a\, c_1 \dots c_k\, b\, d_1 \dots d_\ell) = (b\, d_1 \dots d_\ell)(a\, c_1 \dots c_k)$

ovšem $(a\, c_1 \dots c_k\, b\, d_1 \dots d_\ell)(a\,b) = (a\, d_1 \dots d_\ell)(b\, c_1 \dots c_k)$

3) z 1) plyne rozklad na transpozice, např.

$$(2\,4\,1\,5) = (2\,4)(4\,1)(1\,5) = (2\,4)(1\,4)(1\,5)$$

4) ovšem dokonce lze každou permutaci rozložit na transpozice typu $(1\,2), (2\,3), \dots (n{-}1\; n)$, tj. $(i, i{+}1)$

[podle 3) stačí rozložit transpozici $(j\; j{+}k)$, kde $k > 1$ a $j+k \leq n$

postupně využívám $(j\; j{+}k) = \underbrace{(j\; j{+}k{-}1)(j{+}k{-}1\;\; j{+}k)(j\;\; j{+}k{-}1)}_{\text{sdružení, tj. zaměníme } j+k-1 \text{ číslem } j}$

až se dostaneme k $(j\; j{+}1)$

po drobném přeuspořádání a zrušení stejných cyklů dostaneme

$$(j\; j{+}k) = (j\; j{+}1)(j{+}1\;\; j{+}2) \dots (j{+}k{-}1\;\; j{+}k)(j{+}k{-}2\;\; j{+}k{-}1) \dots (j\; j{+}1)$$

neboli stačí ukázat, že $(j\; j{+}k) = (j\; j{+}1 \dots j{+}k)(j{+}k{-}1 \dots j)$

což je zřejmé z rozepsání

$$(j\; j{+}k) = \left\{\begin{array}{cccccccc} 1 \dots j{-}1 & j & j{+}1 & \dots & j{+}k{-}1 & j{+}k & \dots & n \\ 1 \dots j{-}1 & j{+}k{-}1 & j & \dots & j{+}k{-}2 & j{+}k & \dots & n \\ 1 \dots j{-}1 & j{+}k & j{+}1 & & j{+}k{-}1 & j & \dots & n \end{array}\right\} a_2$$

Počet prvků tříd sdružených prvků

- označme určitou třídu symbolem $(\nu) = (1^{\nu_1}, 2^{\nu_2}, \dots n^{\nu_n})$, kde ν_2 = počet 2-cyklů
- protože cykly můžeme permutovat a posunovat elementy v cyklu

bude

$$\# C_{(\nu)} = \frac{n!}{1^{\nu_1}\nu_1!\; 2^{\nu_2}\nu_2! \dots n^{\nu_n}\nu_n!}$$

(2^{ν_2}: posun 2-cyklů; $\nu_2!$: permutace 2-cyklů)

Reprezentace symetrické grupy S_n

- obecné poznámky:
  - počet IR je jako vždy roven počtu tříd sdružených prvků, které jsou dány strukturou cyklů $\Rightarrow$ počet IR = počet rozkladů čísla n

Př:

$S_3 \sim C_{3v}$	E (1^3)	σ_v $3(2^1 1^1)$	C_3 $2(3^1)$
$A_1 = \Gamma^s = \Gamma^1$	1	1	1
$E = \Gamma^2$	2	0	-1
$A_2 = \Gamma^a = \Gamma^3$	1	-1	1

číslo $3 = 1+1+1$
$= 2+1$
$= 3$

má tři rozklady $\Rightarrow$ 3 IR a také 3 třídy (1^3), $(2^1 1^1)$ a (3^1)

s počty prvků $\#(1^3) = \frac{3!}{1^3 \cdot 3!} = 1$

$\#(2^1 1^1) = \frac{3!}{1^1 1!\, 2^1 \cdot 1!} = 3$

$\#(3^1) = \frac{3!}{3^1 \cdot 1!} = 2$

- každá grupa S_n má dvě jednorozměrné IR
  symetrickou Γ^s, kdy $\chi^s(g) = 1$ pro $\forall g \in S_n$
  a antisymetrickou Γ^a, kdy $\chi^a(g) = \begin{cases} 1 & \text{pro sudé permutace} \\ -1 & \text{pro liché permutace} \end{cases}$
  (též alternující)

  (neboť složením dvou sudých či dvou lichých permutací dostaneme sudou $\Leftrightarrow$ $1 \cdot 1 = (-1)(-1) = 1$, a složením liché a sudé dostaneme lichou $\Leftrightarrow$ $(-1) \cdot 1 = -1$)

- navíc, je-li Γ^μ lib. IR grupy S_n s maticemi $D^\mu(g)$, pak je též IR $\Gamma^{\tilde\mu}$ s maticemi $D^{\tilde\mu}(g) = \chi^a(g) D^\mu(g)$ a charakterem $\chi^{\tilde\mu}(g) = \chi^a(g)\chi^\mu(g)$

  (Frobeniovo kritérium ireduc. dává
  $$\sum_{g \in S_n} \chi^{\tilde\mu}(g)^* \chi^{\tilde\mu}(g) = \sum_{g \in S_n} \underbrace{(\chi^a(g))^2}_{1} \chi^\mu(g)^* \chi^\mu(g) = \# G$$
  je-li Γ^μ ireducibilní)

  můžou nastat 2 možnosti:

  a) buď jde o dvě různé IR (říká se jim pak sdružené) kdy je alespoň jeden charakter u liché permutace nenulový (viz např. IR T_1 a T_2 u grupy $T_d \sim S_4$)

  b) nebo $\Gamma^{\tilde\mu} = \Gamma^\mu$, kdy však musí být všechny charaktery lichých permutací nulové (samosdružená IR) (viz repr. E u $C_{3v} \sim S_3$ či u $T_d \sim S_4$)

- obecně se při značení a odvozování IR grupy S_n používají Youngovy tabulky (viz níže), uvedeme si výsledky bez důkazů, podrobnosti viz např. kniha od Hamermeshe

Youngovo schéma, Youngova tabulka a Yamanouchiho symbol

- označení tříd pomocí symbolu $(\nu)=(1^{\nu_1},2^{\nu_2},\dots,n^{\nu_n})$

  vyjadřující <u>cyklickou strukturu</u> permutací: ν_1 cyklů délky 1

  $\vdots$

  ν_n cyklů délky n

  pro něž platí

  $$\nu_1+2\nu_2+\dots+n\nu_n=n$$

  (tedy ν_i jsou často nulová)

- přestože se $\#IR=\#$tříd, k označení IR se používá jiný symbol, a sice $[\lambda]=[\lambda_1,\dots\lambda_n]$, který je sice ve vztahu k (ν) pomocí $\lambda_k=\sum_{j=k}^{n}\nu_j$ pro $k=1,\dots,n$

  navíc

  $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\dots\geq\lambda_n\geq 0 \Leftarrow$

  a též $\nu_i=\lambda_i-\lambda_{i+1}$ pro $i=1,\dots,n-1$

  neboli

  $$\begin{aligned}\lambda_1&=\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n\\ \lambda_2&=\nu_2+\dots+\nu_n\\ &\vdots\\ \lambda_n&=\nu_n\end{aligned}$$

  z čehož $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=\nu_1+2\nu_2+\dots n\nu_n=n$

  ovšem označení IR se bere jako nezávislé na značení tříd

- vidíme, že $[\lambda]$ je určitý rozklad čísla n, a tedy počet IR (a i počet tříd) je roven počtu možných rozkladů čísla n (není jednoduchý vzorec)

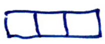
- v obou symbolech (ν) i $[\lambda]$ se obvykle vynechávají nuly

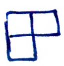
  a každému rozkladu čísla n odpovídá jedna třída a jedna IR $D^{[\lambda]}$ grupy S_n a lze ji graficky znázornit pomocí Youngova schémato (n buněk uspořádaných do řádků pod sebou o délkách $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\dots\geq\lambda_r$)

  r … počet nenulových λ_i

<u>Př:</u> pro S_3 budeme mít

standardní uspořádání IR ↓

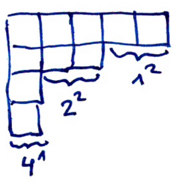
$[3] \longleftrightarrow$  $\longleftrightarrow (1^3)$

$[21] \longleftrightarrow$  $\longleftrightarrow (1^1,2^1)$

$[1^3]=[111] \longleftrightarrow$  $\longleftrightarrow (3^1)$

} třídy sdružených prvků

- obecněji tedy

$[531^2] \longleftrightarrow$ $\lambda_1=5\rightarrow$, $\lambda_2=3\rightarrow$, $\lambda_3=1\rightarrow$, $\lambda_4=1\rightarrow$  $\longleftrightarrow (1^2,2^2,4^1)$

- <u>Youngova tabulka</u> je obecně Youngovo schéma vyplněné čísly $1, \dots, n$, ovšem užitečné jsou především <u>standardní Youngovy tabulky</u> (YT), kdy v každém řádku, resp. sloupci vyplněná čísla rostou zleva doprava, resp. shora dolů

- ukazuje se, že pomocí standardních YT lze označit jednotlivé bázové funkce (vektory) příslušející IR dané odpovídajícím Youngovým schématem

<u>Př:</u> pro S_3 dostaneme

jediná možnost vyplnění

$$[3] \longleftrightarrow \boxed{1|2|3} \Rightarrow d^{[3]} = 1 \longleftrightarrow A_1$$

zde je použito tzv. slovníkové uspořádání $\longrightarrow$

$$[21] \longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} < \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \Rightarrow d^{[21]} = 2 \longleftrightarrow E$$

$$[1^3] \longleftrightarrow \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array} \Rightarrow d^{[1^3]} = 1 \longleftrightarrow A_2$$

pro grupu $C_{3v} \sim S_3$

- obecně <u>počet standardních YT</u> pro určité YS $[\lambda]$ tedy <u>dává dimenzi</u> odpovídající IR $\underline{d^{[\lambda]}}$

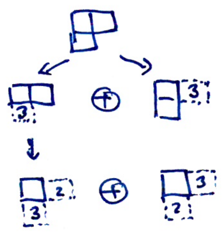
- protože YT jsou poněkud těžkopadné pro označení vektorů báze, používá se jiný symbol, tzv. <u>Yamanouchiho symbol</u>

$\{r\} = \{r_n, r_{n-1}, \dots, r_2, r_1\}$, kde r_i udává číslo řádku, ve kterém se nachází číslo „i" ve SYT

např. $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \longleftrightarrow \{2,1,1\}$, $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \longleftrightarrow \{1,2,1\}$

pozn.: Youngova schémata a SYT jsou vymyšleny tak, aby bylo snadné určovat rozklady subdukovaných reprezentací při přechodu od S_n k S_{n-1} a dále k S_{n-2} atd.

Př: v S_3



S_2

S_1

2 možné odebrání $\boxed{3}$ odpovídají rozkladu na 2 IR podgrupy S_2

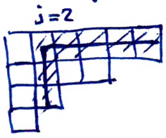
a pak vždy jedno odebrání $\boxed{2}$ dává rozklad na 2 IR (stejné) podgrupy S_1

neboli $[21] = [2] \oplus [1^2] = [1] \oplus [1]$

obecně: IR grupy S_n pro YS $[\lambda]$ subdukovaná na S_{n-1} $\left(\text{permutace} \begin{pmatrix} 1\,2 \dots n-1 & n \\ p_1 p_2 \dots p_{n-1} & n \end{pmatrix}\right)$ je direktním součtem IR S_{n-1} odpovídajících YS vzniklých z $[\lambda]$ odebráním jednoho čtverečku všemi <u>možnými</u> způsoby

- hák, háková tabulka a pravidlo pro dimenzi $d^{[\lambda]}$

- jako **hák v Youngově schématu** označujeme všechna políčka napravo a dolů od jistého políčka (i,j) včetně tohoto políčka, např. $i=1$, $j=2$



zde $h_{12}=7$

- **délka háku** h_{ij} = počet těchto políček

- **háková tabulka** = Youngovo schéma vyplněné délkami háků, např.
$\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 1 & \\ \cline{1-1}\end{array}$
nebo
$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 9 & 7 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 6 & 4 & 2 & 1 & & \\ \cline{1-4} 3 & 1 & & & & \\ \cline{1-2} 1 & & & & & \\ \cline{1-1}\end{array}$

- lze ukázat, že dimenze $d^{[\lambda]} = \dfrac{n!}{\prod_{i,j} h_{ij}}$ (tzv. hákové pravidlo)

Př: pro S_3: $\boxed{3|2|1} \Rightarrow d^{[3]} = \frac{3!}{3\cdot 2} = 1$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 1 & \\ \cline{1-1}\end{array} \Rightarrow d^{[21]} = \frac{3!}{3} = 2$

$\begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array} \Rightarrow d^{[1^3]} = \frac{3!}{3\cdot 2} = 1$

nebo pro S_{13} a výše uvedenou hákovou tabulku
$d^{[6421]} = 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10 =$
$= 17160$:-)

Charaktery ireducibilních repr. S_n (podle Coleman: Adv. Quant. Chem. vol. 4 (1968) 83)

- vezmeme první sloupec hákové tabulky pro $[\lambda]$ a zaveďme symbol $D = |h_{11}\ h_{21}\ h_{31} \dots h_{r1}| = |h_1\ h_2 \dots h_r|$, pro který použijeme pravidla:
  1) $D=0$ pokud lib. $h_i<0$ nebo pokud $h_i=h_j$ pro lib. i a j
  2) D změní znaménko, pokud přehodíme lib. h_i a h_j
  3) $D_0 = |r-1\ \ r-2\ \dots\ 2\ 1\ 0| = 1$
  4) „násobení" číslem μ:
  $\mu D = |h_1-\mu\ \ h_2 \dots h_r| + |h_1\ \ h_2-\mu \dots h_r| + \dots + |h_1\ h_2 \dots h_r-\mu|$
- chceme-li spočítat charakter třídy $(\nu) = (1^{\nu_1}, 2^{\nu_2}, \dots, n^{\nu_n})$, násobíme D postupně ν_n-krát číslem n, ν_{n-1}-krát $n-1, \dots, \nu_1$-krát 1, a postupně zjednodušujeme podle výše uvedených pravidel až na součet D_0

Př: charaktery S_4

	$T_d \sim S_4$	$1(1^4)$	$6(1^2,2)$	$8(1,3)$	$3(2^2)$	$6(4)$
$D=\|4\| \longleftrightarrow$	$\chi^{[4]}$	1	1	1	1	1
$D=\|41\| \longleftrightarrow$	$\chi^{[3,1]}$	3	1	0	-1	-1
$D=\|32\| \longleftrightarrow$	$\chi^{[2,2]}$	2	0	-1	2	0
$D=\|421\| \longleftrightarrow$	$\chi^{[2,1^2]}$	3	-1	0	-1	1
$D=\|4321\| \longleftrightarrow$	$\chi^{[1^4]}$	1	-1	1	1	-1

pro $(1^2,2)$: $2D=|2|$, $1^2|2| = |0| = 1 \Leftarrow D=|4|$
apod.

např. pro $\chi^{[2,2]}(1,3)$:
$3|32| = |02| + \underbrace{|3-1|}_{0} = -|20|$
$-1|20| = -|10| - |2-1| = -1$

nebo
$\chi^{[21^2]}(4)$: $4|421| = |021| = |210| = 1$

a pro $\chi^{[1^4]}(2^2)$: $2|4321| = |4301|$, $2|4301| = |2301| = 1$ atd.

Maticová reprezentace symetrické grupy – tzv. ortogonální

- odvozena Alfredem Youngem na začátku 20. století
- víme, že stačí najít matice reprezentující transpozice $(i\ i{+}1)$, neboť všechny ostatní permutace z nich lze složit, a tedy i matice reprezentující lib. permutaci dostaneme jako součin matic pro $(i\ i{+}1)$
- pro transpozice $(i\ i{+}1)$ v rámci grupy S_n lze zkonstruovat matice IR příslušejících Youngovu schématu $[\lambda]$ následovně:

1) zkonstruujte standardní YT pro $[\lambda]$ ve vzestupném pořadí (u Yamanouchiho symbolů sestupně)
   - po sobě jdoucí čísla i a $j=i+1$ se vyskytují buď
     a) ve stejném řádku
     nebo b) ve stejném sloupci
     nebo c) v různých řádcích a sloupcích, ale pak je lze prohodit, přičemž opět dostaneme SYT

2) číslujte řádky a sloupce matice pomocí SYT, neboli pomocí Yamanouchiho symbolů a vyplňte ji pro transpozici $(i\ j)$ takto:
   a) pro SYT, kde i a j jsou na stejném řádku, vyplňte 1 na diagonálu, 0 jinde
   b) jsou-li i a j ve stejném sloupci, pak na diagonálu -1
   c) do průsečíků 2 řádků a 2 sloupců označených SYT, ve kterých lze i a j prohodit (tj. nejsou ve stejném řádku, ani sloupci), vyplňte hodnoty $\begin{pmatrix} -\rho & \sqrt{1-\rho^2} \\ \sqrt{1-\rho^2} & \rho \end{pmatrix}$ kde ρ^{-1} je nejmenší počet kroků z políčka s hodnotou i do políčka s j

Př. IR $[\lambda]=[31]$ grupy S_4

1) $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array}$ $\quad\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$ $\quad\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$

$Y_1=\{2,1,1,1\}$ $\quad Y_2=\{1,2,1,1\}$ $\quad \{1,1,2,1\}=Y_3$

jde o 3-rozměrnou IR

2)
$$D^{[3,1]}(12)=\begin{array}{c} \\ Y_1\\ Y_2\\ Y_3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} Y_1 & Y_2 & Y_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$D^{[3,1]}(23)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

např. v $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$ je počet kroků z 2 do 3 roven $2=\frac{1}{\rho}\Rightarrow\rho=\frac{1}{2}$

$$D^{[3,1]}(34)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{\sqrt{8}}{3}&0\\\frac{\sqrt{8}}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

v $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array}$ je počet kroků z 3 do 4 roven $3=\frac{1}{\rho}\Rightarrow\rho=\frac{1}{3}$

Cvičení: konstrukce IR grupy S_4 pomocí indukce z IR podgrupy S_3

- jde zároveň o IR grupy $T_d \sim S_4$ pomocí IR grupy $C_{3v} (\subset T_d) \sim S_3$

- vyjdeme z IR grupy S_3, která v S_4 tvoří podgrupu

$C_{3v} \sim S_3$	E (1^3)	$3\sigma_v$ $3(2^1 1^1)$	$2C_3$ $2(3^1)$
$A_1 = [3]$	1	1	1
$E = [21]$	2	0	-1
$A_2 = [1^3]$	1	-1	1

$$S_3 \sim H = \{\underbrace{(1)(2)(3)(4)}_{\sim E},\ \underbrace{(123)(4)}_{\sim C_3},\ \underbrace{(132)(4)}_{\sim C_3},\ \underbrace{(12)(3)(4)}_{\sim \sigma_d},\ \underbrace{(13)(2)(4)}_{\sim \sigma_d},\ \underbrace{(23)(1)(4)}_{\sim \sigma_d}\}$$

kde (4) zůstává stále na místě, tj. permutujeme pouze 1, 2, 3

- levé třídy lze generovat pomocí transpozic se 4:

$g_1 = E$

$$g_2 = (14) \Rightarrow g_2 H = \{\underbrace{(14)(2)(3)}_{\sim \sigma_d},\ \underbrace{(1234)}_{\sim S_4},\ \underbrace{(1324)}_{\sim S_4},\ \underbrace{(124)(3)}_{\sim C_3},\ \underbrace{(134)(2)}_{\sim C_3},\ \underbrace{(14)(23)}_{\sim C_2}\}$$

$$g_3 = (24) \Rightarrow g_3 H = \{\underbrace{(24)(1)(3)}_{\sim \sigma_d},\ \underbrace{(1423)}_{\sim S_4},\ \underbrace{(1342)}_{\sim S_4},\ \underbrace{(142)(3)}_{\sim C_3},\ \underbrace{(13)(24)}_{\sim C_2},\ \underbrace{(234)(1)}_{\sim C_3}\}$$

$$g_4 = (34) \Rightarrow g_4 H = \{\underbrace{(34)(1)(2)}_{\sim \sigma_d},\ \underbrace{(1243)}_{\sim S_4},\ \underbrace{(1432)}_{\sim S_4},\ \underbrace{(12)(34)}_{\sim C_2},\ \underbrace{(143)(2)}_{\sim C_3},\ \underbrace{(243)(1)}_{\sim C_3}\}$$

- charaktery indukovaných reprezentací jsou obecně dány

$$\chi^{\mu \uparrow S_4}(g) = \sum_{s=1}^{4} \delta_{s,g}(g)\, \chi^{\mu}_{S_3}(g_s^{-1} g g_s)$$

kde $\delta_{s,g}(g) = 1$ pro $g_s^{-1} g g_s \in H$

- protože se při sdružení zachovává struktura cyklů, tak $g_s^{-1} g g_s \in H$ jen pro g ze tříd

1) $(1^4) = E$: $\chi^{\mu\uparrow S_4}(E) = 4 \cdot \chi^{\mu}_{S_3}(E)$
   $\uparrow$ $g_s^{-1} E g_s \in H$ pro $\forall g_s$

2) $(2^1 1^2)$: vezmeme $g = (12)(3)(4)$
   $\Rightarrow g_s^{-1} g g_s \in H$ pro $g_1 = E$ a $g_4 = (34)$
   $\Rightarrow \chi^{\mu\uparrow S_4}(2^1 1^2) = 2 \cdot \chi^{\mu}_{S_3}(2^1 1^1)$

3) $(3^1 1^1)$: vezmeme $g = (123)(4)$
   $\Rightarrow g_s^{-1} g g_s \in H$ jen pro $g_1 = E$
   $\Rightarrow \chi^{\mu\uparrow S_4}(3^1 1^1) = 1 \cdot \chi^{\mu}_{S_3}(3^1)$

- pro třídy (4^1) a (2^2) bude charakter vždy nulový, neboť nejsou obsaženy v H vůbec

S_4	E (1^4)	$6\sigma_d$ $6(2^1 1^2)$	$3C_2$ $3(2^2)$	$8C_3$ $8(3^1 1^1)$	$6S_4$ $6(4^1)$
$[3]\uparrow S_4$	4	2	0	1	0
$[21]\uparrow S_4$	8	0	0	-1	0
$[1^3]\uparrow S_4$	4	-2	0	1	0
$[4]$	1	1	1	1	1
$[31]$	3	1	-1	0	-1
$[2^2]$	2	0	2	-1	0
$[21^2]$	3	-1	-1	0	1
$[1^4]$	1	-1	1	1	-1

$[3]\uparrow S_4$ $[21]\uparrow S_4$ $[1^3]\uparrow S_4$

- postupnou konstrukci IR grupy S_4 z IR grupy S_3 lze tedy provést tak, že v $[3]\uparrow S_4$ a $[1^3]\uparrow S_4$ zjistíme, kolikrát je v nich obsažena sym. a antisym. IR $[4]$ a $[1^4]$ a pak odečtením $[4]$ od $[3]\uparrow S_4$ a $[1^4]$ od $[1^3]\uparrow S_4$ dostaneme $[31]$ a $[21^2]$, u kterých ověříme, že jde již o IR, pak rozložíme $[21]\uparrow S_4$ na $[31] + [21^2] +$ zbytek, kde zbytek bude poslední IR $[2^2]$