Lieova grupa a její Lieova algebra geometricky

Def.: Topologická grupa G je topologický prostor, který je zároveň grupou a navíc zobrazení

$\phi : G \times G \to G$ tj. $\phi : (a,b) \mapsto a \cdot b$ odpovídající grupové operaci a inverzi
$i : G \to G$ tj. $i : a \mapsto a^{-1}$

jsou spojitá v topologickém smyslu.

Def.: Reálná Lieova grupa G je topologická grupa, která je zároveň reálnou hladkou varietou a zobrazení ϕ a i jsou navíc hladká zobrazení (či analytická zobrazení)

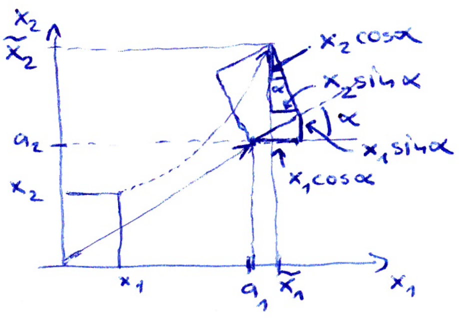
- historická poznámka: pátý Hilbertův problém z roku 1900 se týkal toho, zda je nutné požadovat hladkost, zda nestačí pouze to, aby šlo o topologickou grupu a topologickou varietu, tj. zda nestačí spojitost, ukázalo se, že ~~za~~ poměrně obecných podmínek ano ~~a~~ tedy spojitost φ a i plus algebraická struktura grupy již implikují hladkost (analytičnost)

Příklad: grupa transformací Euklidovské roviny, které zachovávají vzdálenosti a orientaci = speciální Euklidovská grupa $E^+(2)$
= grupa přemístění objektu v rovině

- je dána transformacemi

$$\tilde{x}_1 = x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha + a_1$$

$$\tilde{x}_2 = x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha + a_2$$



neboli

$$\tilde{x} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vlastní rotace} \\ \text{o úhel } \alpha}}{R(\alpha)\, x} + \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{posunutí} \\ \text{o vektor } a}}{a}$$

- složením dvou těchto transformací dostaneme opět podobnou transformaci

$$\tilde{\tilde{x}} = R(\beta)\tilde{x} + b = \underbrace{R(\beta)R(\alpha)}_{\substack{\text{rotace o úhel} \\ \gamma = \alpha+\beta}} x + \underbrace{R(\beta)a + b}_{\substack{\text{posunutí o vektor} \\ c = R(\beta)a + b}} = R(\gamma)x + c$$

- jde o 3-rozměrnou (3-parametrickou) Lieovu grupu, kde každý prvek je charakterizován trojicí hodnot (α, a_1, a_2) a kde grupová operace $\phi : G \times G \to G$ je dána vztahy $\phi(B(\beta, b_1, b_2), A(\alpha, a_1, a_2)) = C(\gamma, c_1, c_2)$

kde $\gamma = \alpha + \beta$, $c = R(\beta) a + b$ neboli $c_1 = a_1 \cos\beta - a_2 \sin\beta + b_1$, $c_2 = a_1 \sin\beta + a_2 \cos\beta + b_2$

což jsou hladké (analytické) funkce, a inverzní operace $i : G \to G$ neboli $i(A(\alpha, a_1, a_2)) = B(\beta, b_1, b_2)$

je dána pomocí $\beta = -\alpha$, $b = -R(-\alpha) a$

$b_1 = -a_1 \cos\alpha - a_2 \sin\alpha$

$b_2 = a_1 \sin\alpha - a_2 \cos\alpha$

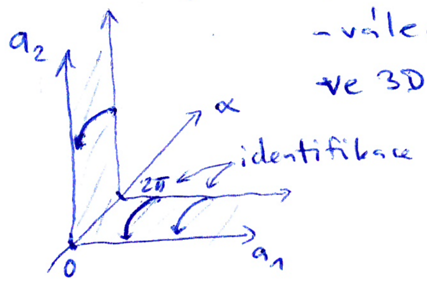
jsou též hladké (analytické) funkce

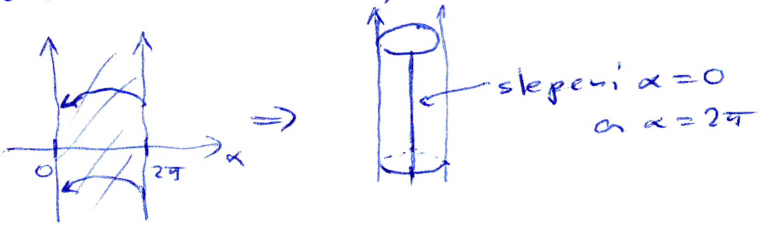
neboť pak $\phi(B, A) = E$ ← identita

neboli $\tilde{\tilde{x}} = \underbrace{R(-\alpha)}_{R(\beta)} R(\alpha) x + \underbrace{R(-\alpha)}_{R(\beta)} a - R(-\alpha) a = x$

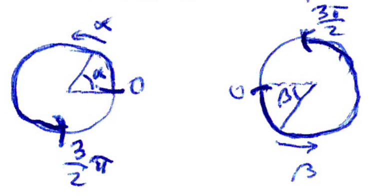
- protože pro $\alpha = 0$ a $\alpha = 2\pi$ dostáváme totéž, nelze použít globálně jednu hladkou parametrizaci (mapu)

- topologicky jde o 3-rozměrnou hladkou varietu - válec ve 4D zkonstruovaný z nekonečné vrstvy ve 3D a identifikací bodů krajních rovin jako u 3D válce z roviny

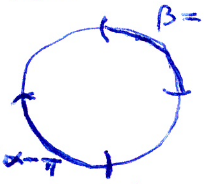




- stačí dvě mapy: vždy celé roviny (a_1, a_2) a úhel např. $\alpha \in (0, \frac{3}{2}\pi)$ a $\beta \in (0, \frac{3}{2}\pi)$ ovšem měřeno od jiného úhlu



přechodové funkce jsou



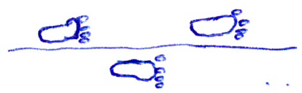
$\beta = \alpha + \pi$ pro $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\beta = \alpha - \pi$ pro $\alpha \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$

obě hladká zobrazení

- jde o souvislou Lieovu grupu, ale ne o jednoduše souvislou (uzavřená křivka pro α od 0 do 2π nelze smrsknout do bodu)

- jde o podgrupu plné Euklidovské grupy $E(2) = ISO(2)$, což je grupa všech izometrií roviny (kromě vlastních rotací a translací navíc nevlastní rotace (tedy i zrcadlení či inverze), ale také tzv. skluzová symetrie = posun + zrcadlení)



která má 2 komponenty souvislosti $E^+(2)$ a $E^-(2)$

- je to také podgrupa obecnějších, afinních transformací roviny, které tvoří afinní grupu $GA(2,\mathbb{R})$

$\tilde{x} = Ax + a$, kde A je libovolná invertovatelná (tj. $\det A \neq 0$) reálná matice 2×2

kterou lze přepsat maticově pomocí

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A & a \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a tedy jde i o podgrupy $GL(3,\mathbb{R})$ = matice $A_{3\times3}$, které jsou reálné a $\det A \neq 0$

neboť

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & a_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A_2 & a_2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 A_2 & \overset{\text{vektor}}{A_1 a_2 + a_1} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

- přestože jako topologický prostor jde o direktní (kartézský) součin prostorů $\mathbb{R}^2$ a $SO(2)$, není grupa $E^+(2)$ přímým součinem grup $T = (\mathbb{R}^2, +)$ = grupa pouze translací a $SO(2)$ = grupa rotací kolem počátku

protože prvky z těchto podgrup nekomutují

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & Ra \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ovšem T je normální podgrupou, takže jde o polopřímý součin $E^+(2) = T \rtimes SO(2)$