Levoinvariantní vektorová pole na Lieových grupách

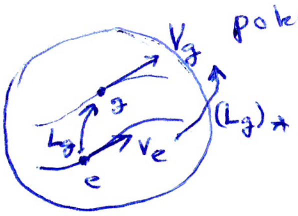
- na Lieových grupách máme dva difeomorfismy -
  - levé a pravé posunutí, kdy celou grupu G přenásobíme jedním prvkem $g \in G$ (vzpomeňte větu o přeuspořádání, která platí i pro spojité grupy)

tj. $L_g : G \to G$, $L_g : h \to gh$
$R_g : G \to G$, $R_g : h \to h \cdot g$
z definice jde o hladká zobrazení a jsou bijektivní a tedy difeomorfismy G na G

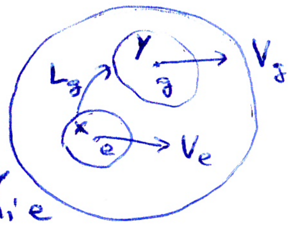
Def: Nechť G je Lieova grupa a L_g, resp. R_g značí levé, resp. pravé posunutí na G, pak řekneme, že vektorové pole V je levo-, resp. pravoinvariantní, pokud platí

$$(L_g)_* V = V, \text{ resp. } (R_g)_* V = V \quad \text{pro } \forall g \in G$$

push-forward



souřadnicově musí platit pro L_g



složky V v okolí g $\longrightarrow$ $V^\nu(y(x)) = J^\nu{}_\mu(x)\, V^\mu(x)$ $\longleftarrow$ složky V v okolí e

dáný levým posunutím L_g

Jacobián změny souřadnic při L_g, tj. $J^\nu{}_\mu(x) = \dfrac{\partial y^\nu(x)}{\partial x^\mu}$

- levo- i pravoinvariantní pole jsou plně určena tečným vektorem v identitě e (ale také libovolným vektorem v jiném bodě) „roznesením" $V_g = (L_g)_* V_e$

  a jsou hladká (neboť $g \cdot h$ je hladké)

  a tedy tvoří „pouze" n-rozměrný vektorový prostor izomorfní T_eG a označíme ho $\mathcal{L}(G)$ (pro levoinvariantní vekt. pole)

- protože při difeomorfismech pro Lieovu závorku platí $\phi_*[V,W] = [\phi_* V, \phi_* W]$, kde $[V,W]_p(f) = V_p(Wf) - W_p(Vf)$

dostáváme pro levoinvariantní pole (též pro pravoinvariantní)

$$(L_g)_*[V,W] = [(L_g)_* V, (L_g)_* W] = [V,W] \quad \text{pro } \forall V \text{ a } W \text{ z } \mathcal{L}(G)$$

a tedy i $[V,W] \in \mathcal{L}(G)$ a $\mathcal{L}(G)$ tak tvoří Lieovu algebru s komutátorem $[V,W]$

Def: Lieova algebra Lieovy grupy G je vektorový prostor $\mathcal{L}(G)$ všech levoinvariantních vektorových polí s komutátorem daným Lieovou závorkou dvou vektorových polí $[V,W] = V(Wf) - W(Vf)$.

- použití levoinvariantních vekt. polí je volba, stejně tak bychom mohli použít pravoinvariantní v. pole, která jsou obecně různá od levoinvariantních.

- někdy se LA Lieovy grupy G definuje jako tečný prostor v identitě T_eG, ovšem pak je třeba definovat komutátor na tomto prostoru, což lze obecně jen přes levoinvariantní pole generovaná prvky z T_eG, a sice $[V_e, W_e] \equiv [V,W]_e$

kde V a W jsou levoinv. pole z V_e a W_e

Lieova algebra abstraktně

Def: Reálná Lieova algebra $\mathcal{L}$ dimenze n je n-rozměrný reálný vektorový prostor, na kterém je definována (kromě součtu vektorů) binární operace nazývaná komutátor $[a,b]$ pro $\forall a,b \in \mathcal{L}$ splňující

1) $[a,b] \in \mathcal{L}$ pro $\forall a,b \in \mathcal{L}$ (uzavřenost)
2) $[\alpha a + \beta b, c] = \alpha[a,c] + \beta[b,c]$ (linearita)
3) $[a,b] = -[b,a]$ (antisymetričnost)
4) $[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0$ (Jacobiho identita)

(2)–(4): pro $\forall a,b,c$ z $\mathcal{L}$ a $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- důsledkem 2) a 3) je $[a, \beta b + \gamma c] = \beta[a,b] + \gamma[a,c]$ (bilinearita)

- obdobně definice komplexní LA či LA nad tělesem K

Př: 1) vektorový prostor matic $n \times n$ s komutátorem $[A,B] = AB - BA$

2) LA lineárních operátorů s komutátorem $[a,b]f = a(bf) - b(af)$

Adoův teorém: Každá konečně-rozměrná abstraktní Lieova algebra nad tělesem K s nulovou charakteristikou je izomorfní nějaké Lieově algebře matic nad tělesem K.

- takže si pro konečně-rozměrné LA vystačíme s maticemi, viz níže Lieovy algebry maticových grup jako je $GL(n,\mathbb{R})$ kde si ukážeme, že její LA levoinvariantních vektorových polí je izomorfní LA matic $n\times n$

Def: Nechť e_i, $i=1,\dots,n$ tvoří bázi v $\mathcal{L}$. Pak $[e_i,e_j]$ musí být lineární kombinace bázových prvků a píšeme

$$[e_i,e_j]=\sum_{k=1}^{n} c_{ij}^{k} e_k$$

kde c_{ij}^k jsou tzv. strukturní konstanty Lieovy algebry $\mathcal{L}$ vzhledem k bázi e_i.

- c_{ij}^k závisí na bázi a transformují se jako tenzor 3. řádu při změně báze

- každý komutátor $[a,b]$ lze vyjádřit pomocí složek vektorů a, b v bázi a strukturních konstant:

$$[a,b]=\sum_{k,\ell,m} a^k b^\ell c_{k\ell}^m e_m \quad \text{, kde } a=\sum_{k=1}^{n} a^k e_k \text{ a } b=\sum_{\ell=1}^{n} b^\ell e_\ell$$

- z podmínek 3) a 4) v def. LA dostaneme

$$c_{ij}^k=-c_{ji}^k \quad \text{a} \quad c_{pq}^s c_{rs}^t + c_{qr}^s c_{ps}^t + c_{rp}^s c_{qs}^t = 0$$

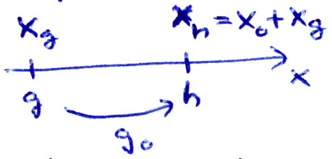
- pokud je LA asociována s určitou LG, pak strukturní konstanty LA se též nazývají strukturními konstantami příslušné Lieovy grupy.

Cvičení na levoinvariantní vektorová pole

1) Uvažujme grupu $G = (\mathbb{R}, +)$ a označme globální souřadnici x

Ukažme, že vektorové pole $V_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ je levoinvariantní, ovšem $V_2 = x\frac{\partial}{\partial x}$ není.

- levé posunutí na G $\quad L_{g_0}: g \mapsto h = g_0 g$ $\quad$ neboli souřadnicově $x_h = x_0 + x_g$



- podmínka levoinvariantnosti vekt. pole $V = V(x)\frac{\partial}{\partial x}$,

tj. $(L_{g_0})_* V = V$ má v souřadnicích tvar

$$V(x_h(x_g)) = J(x_g)V(x_g)$$

kde Jacobián $\quad J(x_g) = \frac{\partial x_h}{\partial x_g} = 1$

a tedy musí být splněna podmínka $V(x_0 + x_g) = V(x_g)$

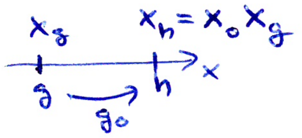
- pro V_1 je $V_1(x) = 1$ a tedy podmínka je splněna

kdežto pro V_2 je $V_2(x) = x$ a tedy $x_0 + x_g \neq x_g$

a podmínka není splněna.

2) Levoinvariantní pole na $G = (\mathbb{R}^+, \cdot)$

- nyní



a tedy $\quad J(x_g) = \frac{\partial x_h}{\partial x_g} = x_0$

a podmínka levoinvariantnosti vekt. pole $V = V(x)\frac{\partial}{\partial x}$

nyní je $\quad V(x_h) = V(x_0 x_g) = J(x_g)V(x_g) = x_0 V(x_g)$

a zvolíme-li $g = e$ $(x_g = 1)$ a $V_e = c\frac{\partial}{\partial x}$, $c \in \mathbb{R}$ (jde o obecný vektor v e)

dostaneme $\quad V(x_0 x_g) = V(x_0) = x_0 V(x_e) = c x_0$

- obecné levoinv. vekt. pole tedy je $\quad V = cx\frac{\partial}{\partial x}$

Levoinvariantní vektorová pole grupy $GL(n,\mathbb{R})$

- jde o grupu všech reálných matic $n\times n$ s $\det A \neq 0$ s grupovou operací násobení matic
- pro $n>1$ jde o neabelovskou grupu dimenze n^2 (pro $n=1$ jde o grupu $(\mathbb{R}^+, \cdot)$)
- je izomorfní grupě $GL(V)$ všech automorfismů reálného n-dimenzionálního vektorového prostoru V (stačí zvolit vhodnou bázi na V)
- jde o nesouvislou, nekompaktní grupu ($\det A$ může být kladný (souvislá podgrupa $GL^+(n,\mathbb{R})$) i záporný)
  - největší kompaktní podgrupou je $O(n)$
- <u>levoinvariantní pole</u> – použijeme globální parametrizaci $x^i{}_j = a_{ij}$, a tedy $L_{g_0}: g \mapsto g_0 g = h$

  v dalším budeme vynechávat sumu

  odpovídá $(x_h)^i{}_j = \sum_{k=1}^{n} (x_0)^i{}_k (x_g)^k{}_j = (x_0)^i{}_k (x_g)^k{}_j$

- Jacobián je $$\frac{\partial (x_h)^i{}_j}{\partial (x_g)^\ell{}_m} = (x_0)^i{}_k\, \delta^k_\ell\, \delta^m_j = (x_0)^i{}_\ell\, \delta^m_j$$

  a tedy podmínka levoinvariantnosti je
  $$V(x_h)^i{}_j = V(x_0 x_g)^i{}_j = (x_0)^i{}_\ell\, \delta^m_j\, V(x_g)^\ell{}_m$$
  a volbou $g=e$, tj. $x_g = 1\!\!1_{n\times n}$, a $V(x_e)^\ell{}_m = C^\ell_m$ ← matice parametrů obecného vektoru $V_e = C^\ell_m \frac{\partial}{\partial x^\ell_m}$

  nakonec dostaneme
  $$V(x_0)^i{}_j = (x_0)^i{}_\ell\, C^\ell_j$$
  neboli levoinvariantní vekt. pole na $GL(n,\mathbb{R})$ jsou obecně dány jako
  $$V_C = x^i{}_\ell\, C^\ell_j \frac{\partial}{\partial x^i{}_j} = C^\ell_j V^j_\ell \quad , \text{kde } V^j_\ell = x^i{}_\ell \frac{\partial}{\partial x^i{}_j}$$
  tvoří bázi n^2 nezávislých levoinv. vekt. polí

Lieova algebra grupy $GL(n,\mathbb{R})$

- je tvořena Lieovou algebrou levoinvariantních vekt. polí s bází $V^j_e = x^i_e \frac{\partial}{\partial x^i_j} = x^i_e \partial^j_i$ a komutátorem báze

$$[V^i_j, V^k_e]f = x^r_j \partial^i_r (x^s_e \partial^k_s f) - x^s_e \partial^k_s (x^r_j \partial^i_r) f =$$ druhé derivace se odečtou

$$= x^r_j \delta^s_r \delta^i_e \partial^k_s f - x^s_e \delta^k_j \delta^r_s \partial^i_r f =$$

$$= (\delta^i_e V^k_j - \delta^k_j V^i_e) f$$

určují strukturní konstanty LA „c^k_{ij}" (zde by měly dvojité indexy")

a dále obecně

$$[V_C, V_D] = [c^i_j V^j_i, d^k_e V^e_k] = c^i_j d^k_e (\delta^j_k V^e_i - \delta^e_i V^j_k) =$$

$$= c^i_k d^k_e V^e_i - d^k_i c^i_j V^j_k = [C,D]^i_e V^e_i = V_{[C,D]}$$

neboli komutátoru dvou levoinv. vekt. polí daných obecnými maticemi C a D odpovídá levoinv. pole dané $[C,D]$

- protože navíc triviálně $V_{\alpha C + \beta D} = \alpha V_C + \beta V_D$, pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je Lieova algebra matic $n \times n$ s komutátorem $[C,D] = CD - DC$ izomorfní s Lieovou algebrou levoinv. vekt. polí na $GL(n,\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ mluvíme o jediné Lieově algebře Lieovy grupy $GL(n,\mathbb{R})$, kterou značíme $gl(n,\mathbb{R})$, ať už máme na mysli matice či levoinv. vekt. pole

neboli máme izomorfismy

$$gl(n,\mathbb{R}) = \mathcal{L}(GL(n,\mathbb{R})) \sim T_e(GL(n,\mathbb{R})) \sim End(\mathbb{R}^n)$$

levoinv. v. pole

tečný prostor v identitě (ovšem s komutátorem $[V_e, W_e] = [V,W]_e$)

endomorfismy na $\mathbb{R}^n$ dané maticemi $n \times n$