Jednoparametrické podgrupy a exponenciální zobrazení

- jde o význačné podgrupy Lieových grup generované prvky Lieovy algebry dané LG, ukážeme si, že půjde o integrální křivky levoinvariantních vekt. polí jdoucí identitou

Def: Jednoparametrická podgrupa Lieovy grupy G je křivka $\gamma(t)$, pro kterou platí $\gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s)$, $\gamma(0) = e$, pro $\forall t,s \in \mathbb{R}$, jde tedy o homomorfismus $\gamma : (\mathbb{R},+) \xrightarrow{do} G$

- obecně nejde o prostý homomorfismus, $\gamma(t)$ je definována pro lib. $t \in \mathbb{R}$, neboť $\gamma(t)\gamma(s)$ má v LG vždy smysl provést
  - pro kompaktní grupy bude jednomu prvku $g = \gamma(t)$ typicky odpovídat mnoho parametrů t
- libovolný prvek jednopar. podgrupy lze psát jako
$$\gamma(t) = \gamma(\varepsilon)^n \quad , \text{kde} \quad \varepsilon = \frac{t}{n}$$
přičemž ε může být libovolně malé a tedy $\gamma(\varepsilon)$ blízké identitě $\Rightarrow$ každé $\gamma(t)$ pro lib. $t \in \mathbb{R}$ lze napsat jako součin (konečný pro konečné t) prvků z okolí e

(obdoba $R^z(\varphi) = \underbrace{\left(1 - i\frac{\varphi}{n}L_z\right)^n}_{\text{malá rotace kolem } z} \xrightarrow[n\to\infty]{\lim} e^{-i\varphi L_z}$ ← toto jsou jednoparametrické podgrupy $SO(3)$ pro různá L)

- ovšem obecně ne každý prvek $g \in G$ lze zapsat jako $\gamma(\varepsilon)^n$, tj. ne každý prvek leží na jednoparam. podgrupě (opak platí jen pro kompaktní grupy)
  - příkladem grupy, kde tomu tak je, je $SL(2,\mathbb{R})$, kde existují matice, které nelze vyjádřit jako exponenciála nějaké matice z její Lieovy algebry (viz domácí úloha na LG)

<u>Věta:</u> <u>Každá jednoparametrická podgrupa Lieovy grupy G je integrální křivkou jistého levoinvariantního vekt. pole</u> (jdoucí identitou) a naopak, integrální křivky levoinvariantního vekt. pole V startující v e jsou jednoparametrickými podgrupami G.

<u>Důkaz:</u> $\Rightarrow$ nechť $\gamma(t)$ je jednoparam. podgrupa G a $\dot\gamma(0)$ její tečný vektor v e, pak stačí ukázat, že roznesením $\dot\gamma(0)$ pomocí levého posunutí (push-forwardu) dostaneme $\dot\gamma(t)$, tj. tečný vektor ke $\gamma(t)$ v čase t,

ovšem postupně dostáváme

$$\dot\gamma(t) \underset{\text{definice}}{=} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \gamma(t+s) \underset{\text{předpoklad}}{=} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \gamma(t)\gamma(s) \overset{\text{def. levého posunutí}}{=} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L_{\gamma(t)}\gamma(s) \underset{\substack{\text{definice}\\ \text{push-forwardu}}}{=}$$

$$= (L_{\gamma(t)})_* \underbrace{\frac{d\gamma(s)}{ds}\Big|_{s=0}}_{\dot\gamma(0)} = (L_{\gamma(t)})_* \dot\gamma(0)$$

a tedy opravdu $\dot\gamma(t)$ je určeno z $\dot\gamma(0)$ pomocí $L_{\gamma(t)}$

$\Leftarrow$ nechť nyní $\gamma(t)$ je integrální křivkou levoinv. vekt. pole V, pak křivka $\Gamma(t) = \gamma(t+s)$ je také integrální křivkou V startující v $\gamma(s)$ (díky $\frac{d(t+s)}{dt} = 1$ a tedy reparametrizace nemění „rychlost"),

ale díky levoinvariantnosti též integr. křivkou vekt. pole $(L_{\gamma(s)})_* V$, což je ale také křivka daná levým posunutím, tj. $L_{\gamma(s)}\gamma(t) = \gamma(s)\gamma(t)$ a tedy $\gamma(t+s) = \gamma(s)\gamma(t)$.

<u>Příklad</u>: <u>Jednoparametrické podgrupy $GL(n,\mathbb{R})$</u>

- víme, že levoinv. vekt. pole na $GL(n,\mathbb{R})$ jsou obecně daný $V_C = x^i{}_k C^k{}_j \frac{\partial}{\partial x^i{}_j}$, kde C je lib. reálná matice $n\times n$

$\Rightarrow$ integrální křivky $\gamma(t) = (x^1{}_1(t), \dots, x^n{}_n(t))$ splňují rovnice $\dot x^i{}_j(t) = x^i{}_k(t) C^k{}_j$ s poč. podmínkou $x^i{}_j(0) = \delta^i{}_j$

- tato soustava má řešení

$$x^i_{\ j}(t) = (\exp(tC))^i_{\ j} = \delta^i_{\ j} + tC^i_{\ j} + \frac{t^2}{2!}(C^2)^i_{\ j} + \dots$$

neboli maticově

$$\dot{x}(t) = x(t)C,\quad x(0) = \mathbb{1} \quad\Rightarrow\quad x(t) = e^{tC}$$

- vidíme, že pro $GL(n,\mathbb{R})$ jsou jednoparam. podgrupy dány pomocí exponenciály matic C odpovídajících jednotlivým levoinvariantním vekt. polím V_C, a tedy existuje vzájemně jednoznačné přiřazení mezi

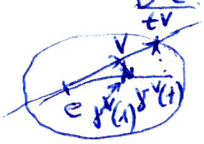
prvky LA LG jakožto maticemi (C) $\longleftrightarrow$ levoinv. vekt. poli (V_C) $\longleftrightarrow$ jednoparametrickými podgrupami (e^{tC})

- to motivuje zavést obecné exponenciální zobrazení z Lieovy algebry do příslušné Lieovy grupy

<u>Def:</u> Nechť $\gamma^V(t)$ je jednoparametrická podgrupa grupy G pro levoinv. vekt. pole V z Lieovy algebry $\mathcal{G}$ této grupy, tj. $\dot{\gamma}^V(t) = V_{\gamma(t)}$, pak je definováno <u>exponenciální zobrazení</u> $\exp: \mathcal{G} \to G$ pomocí vztahu $\exp: V \mapsto e^V = \gamma^V(1)$

<u>Věta:</u> Jednoparametrická podgrupa $\gamma^V(t)$ levoinv. vekt. pole V je dána pomocí exp. zobrazení jako $\gamma^V(t) = e^{tV}$.

<u>Dk:</u> protože $tV \in \mathcal{G}$, tak dle definice exp. platí $e^{tV} = \gamma^{tV}(1)$



tj. tV je tečný vektor křivky $\gamma^{tV}(k)$ v $k=0$, ovšem zároveň je to tečný vektor křivky $\gamma^V(tk)$, neboť

$$\frac{d\gamma^V(tk)}{dk}\Big|_{k=0} = \frac{d\gamma^V(tk)}{d(tk)}\Big|_{tk=0} \cdot \frac{d(tk)}{dk}\Big|_{k=0} = tV$$

a protože $\gamma^{tV}(0) = e = \gamma^V(t\cdot 0)$, jde o stejné křivky a tedy $\gamma^{tV}(k) = \gamma^V(tk)$ a speciálně $\gamma^{tV}(1) = \gamma^V(t) = e^{tV}$

- speciálně: $e^0 = \gamma^V(0) = e$ a $e^{-V} = \gamma^V(-1) = \gamma^V(1)^{-1} = (e^V)^{-1}$

Cvičení: <u>Pokrytí grup SO(3) a SU(2) exponenciálním zobrazením</u> (LG13)

1) $SO(3)$ – grupa ortogonálních matic $A^TA = AA^T = \mathbb{1}$ s $\det A = 1$

- jde o 3-rozměrnou LG parametrizovanou např. Eulerovými úhly, nebo ~~směrem~~ osou otáčení $\vec{n}$ a úhlem φ

- jde o podgrupu $GL(3,\mathbb{R})$ a i zde bude LA levoinv. vekt. polí izomorfní LA určitých matic C, které tvoří podalgebru všech reálných matic $n\times n$, tj. $so(3) \subset gl(3,\mathbb{R})$

- matice C lze určit tak, že budeme uvažovat jednoparametrickou podgrupu $A(t) = e^{tC} = \mathbb{1} + tC + \dots$
a dosadíme do podmínky $A^TA = \mathbb{1}$
neboli $(\mathbb{1} + tC^T + \dots)(\mathbb{1} + tC + \dots) = \mathbb{1}$

z čehož dostáváme podmínku
$$C^T + C = 0 \quad \text{neboli} \quad C = -C^T$$
a tedy <u>LA $so(3)$ je tvořena antisymetrickými reálnými maticemi 3×3 s nulovými prvky na diagonále</u> (takže $\operatorname{Tr} C = 0$ a podmínka $\det A = 1$, která vede na podmínku $\operatorname{Tr} C = 0$ již dále neomezuje)
a prvky pod diagonálou jsou určeny těmi nad diagonálou

- dimenze je tedy 3, jak lze očekávat z dimenze $SO(3)$

- obecně pro $SO(n)$ bychom dostali totéž, a dimenze $so(n)$ by byla rovna počtu maticových prvků nad diagonálou, tedy $\dim so(n) = \frac{n(n-1)}{2}$

- jako standardní báze $so(3)$ se volí matice s prvky
$$(L_i)_{kl} = -\varepsilon_{ikl} \quad \text{neboli} \quad L_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&0&-1\\ 0&1&0 \end{pmatrix},\ L_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&0&0\\ -1&0&0 \end{pmatrix},\ L_3 = \begin{pmatrix} 0&-1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}$$
s komutátory
$$[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} L_k$$
a tedy strukturní konstanty jsou
$$c^k_{ij} = \varepsilon_{ijk}$$

LG 14

- jednoparametrické podgrupy pro obecný prvek LA $so(3)$ daný maticí $C = \varphi\, \vec{n}\cdot\vec{L}$, kde $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$ a $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ je jednotkový vektor jsou dány (φ zde můžeme brát v roli t)

$$A(\vec{n},\varphi) = e^{\varphi \vec{n}\cdot\vec{L}} = 1\!\!1 + \varphi \vec{n}\cdot\vec{L} + \frac{\varphi^2}{2!}(\vec{n}\cdot\vec{L})^2 + \dots$$

s využitím $(L_k)_{ij} = -\varepsilon_{kij}$ a $\sum_s \varepsilon_{ijs}\varepsilon_{kls} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$

dostaneme

$$(\vec{n}\cdot\vec{L})_{ij} = -\sum_{k=1}^{3} n_k \varepsilon_{kij}$$

$$(\vec{n}\cdot\vec{L})^2_{ij} = \sum_{k,l}\sum_s (-n_k \varepsilon_{kis})(-n_l \varepsilon_{lsj}) = -\delta_{ij} + n_i n_j$$

$$(\vec{n}\cdot\vec{L})^3_{ij} = \sum_s (-\delta_{is} + n_i n_s)\Big(\sum_k -n_k \varepsilon_{ksj}\Big) = \sum_k n_k \varepsilon_{kij} = -(\vec{n}\cdot\vec{L})_{ij}$$

$$(\vec{n}\cdot\vec{L})^4_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j = -(\vec{n}\cdot\vec{L})^2_{ij}$$

$$(\vec{n}\cdot\vec{L})^5_{ij} = (\vec{n}\cdot\vec{L})_{ij} \quad \text{atd.}$$

a tedy

$$A(\vec{n},\varphi) = \delta_{ij}\overbrace{\Big(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots\Big)}^{\cos\varphi} + n_i n_j \overbrace{\Big(\frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^4}{4!} + \dots\Big)}^{1-\cos\varphi} - \sum_k n_k \varepsilon_{kij} \overbrace{\Big(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \dots\Big)}^{\sin\varphi}$$

což je matice reprezentující rotaci kolem $\vec{n}$ o úhel φ ve 3D

(vzpomeňte $\vec{x}\,' = \vec{x}\cos\varphi + (1-\cos\varphi)(\vec{n}\cdot\vec{x})\vec{n} + (\vec{n}\times\vec{x})\sin\varphi$)

a tedy každé otočení lze zapsat jako $e^{\varphi\vec{n}\cdot\vec{L}}$ pro vhodné $\vec{n}$ a φ

a $SO(3)$ je pokryta exponenciálním zobrazením.

2) $SU(2)$ - grupa (nyní komplexních) unitárních matic 2×2 splňujících $A^{+}A = AA^{+} = 1\!\!1$ s $\det A = 1$

- nejobecnější prvek této grupy má tvar

$$A = \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix} = 1\!\!1\, x_0 + i(\vec{x}\cdot\vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} x_0 + i x_3 & x_2 + i x_1 \\ -x_2 + i x_1 & x_0 - i x_3 \end{pmatrix}$$

kde $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ jsou Pauliho matice

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

s podmínkou $\det A = |a|^2 + |b|^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

jde tedy o 3-parametrickou reálnou Lieovu grupu

LG15

- jde o podgrupu $GL(2,\mathbb{C})$ a její Lieova algebra bude podalgebrou LA všech komplexních matic $n\times n$

- vezmeme-li $A = e^{tC} = 1 + tC + \dots$, dostaneme nyní podmínky $C^+ + C = 0$ a $\mathrm{Tr}\, C = 0 \leftarrow$ z $\det A = \det e^{tC} = e^{t\mathrm{Tr}C} = 1$

a $su(2)$ je tedy tvořena antihermitovskými $(C = -C^+)$ maticemi 2x2 s nulovou stopou, což platí obecně pro $SU(n)$, pro $U(n)$ odpadá podmínka na nulovou stopu

- přestože jde o komplexní matice, uvažujeme je jako prvky reálné LG a odpovídající reálné Lieovy algebry, tj. uvažujeme pouze reálné lineární kombinace těchto antiherm. matic, takže pro $U(n)$ bude

$$\underbrace{2\cdot\frac{n(n-1)}{2}}_{\text{počet prvků nad diagonálou}} + n = n^2$$ nezávislých prvků LA $u(n)$

reálná a imaginární část jsou nezávislé — na diagonále musí být ryze imaginární čísla

a tedy $U(n)$ je n^2-rozměrná

pro $SU(n)$ máme navíc podmínku $\mathrm{Tr}\, C = 0$, takže máme o jednu nezávislou matici méně $\Rightarrow \dim su(n) = n^2 - 1 = \dim SU(n)$

a tedy $\dim SU(3) = 3$

- jako bázi $su(2)$ lze volit $L_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$ s komutátorem $[L_i, L_j] = \varepsilon_{ijk} L_k$

neboť $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

a obecný prvek je

$$C = \varphi\vec{n}\cdot\vec{L} = -\frac{i}{2}\varphi\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\varphi n_1 & -\frac{1}{2}\varphi n_2 - \frac{i}{2}\varphi n_3 \\ \frac{1}{2}\varphi n_2 - \frac{i}{2}\varphi n_3 & \frac{i}{2}\varphi n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix}$$

což je obecná antiherm. matice s nulovou stopou

- jako jednoparametrické podgrupy dostaneme (opět bereme φ jako parametr t)

$$e^C = e^{-\frac{i}{2}\varphi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = \mathbb{1}\cos\frac{\varphi}{2} - i(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\sin\frac{\varphi}{2}$$

neboť díky $\sigma_i\sigma_j = i\sum_k \varepsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}\mathbb{1}$ dostaneme

$$\left(\sum_i n_i\sigma_i\right)\left(\sum_j n_j\sigma_j\right) = \sum_{i,j} n_i n_j (\underbrace{i\varepsilon_{ijk}\sigma_k}_{0} + \delta_{ij}\mathbb{1}) = \sum_i n_i n_i \mathbb{1} = \mathbb{1}$$

$$= \begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & x_2 + ix_1 \\ -x_2 + ix_1 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix}$$

pokud zvolíme $x_0 = \cos\varphi/2$, $x_i = -n_i \sin\varphi/2$

čímž bude splněna podmínka $\det e^C = 1 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

a tedy i $SU(2)$ je pokryta exponenciálním zobrazením.

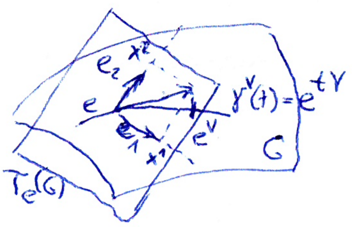
Pokrytí grupy exponenciálním zobrazením - vybrané výsledky

Věta: Každý bod $g \in G$ z jistého okolí e lze zapsat ve tvaru

$$g = e^V \quad \text{pro určitý prvek } V \in \mathcal{G} = T_e(G)$$

tj. z Lieovy algebry $\mathcal{G}$ Lieovy grupy G, přičemž V je z okolí 0 v $\mathcal{G}$.

- přirozený výsledek, neboť jak okolí $U(e) \subset G$, tak okolí $U(0) \subset \mathcal{G}$ jsou difeomorfní přes $\mathbb{R}^n$, kde n je dimenze G a $\mathcal{G}$.



- lze takto zavést lokální souřadnice v okolí e, tzv. normální souřadnice, tj. bodu $g = e^V$ z okolí e přiřadíme $(x^1, \dots, x^n)$, což jsou koeficienty rozvoje V do báze $\mathcal{G}$, tj. $V = \sum_{j=1}^{n} x^j e_j$

- obecně však nelze každý prvek $g \in G$ zapsat jako e^V, pro $V \in \mathcal{G}$
  - buď má grupa G více komponent, pak exp zobrazuje pouze do komponenty souvislosti spojené s identitou
  - nebo, v případě nekompaktních grup můžou i existovat body v komponentě souvislosti spojené s e, které nelze exponenciálou dosáhnout, ale obecně platí:

Věta: Každý bod g Lieovy grupy G z její souvislé podgrupy, tj. komponenty spojené s e, lze zapsat jako konečný součin exponenciál z její LA, tj. $g = \prod_{i=1}^{r} e^{V_i}$, $V_i \in \mathcal{G}$.

Věta: Pokud je LG G kompaktní, pak každý prvek její souvislé podgrupy lze vyjádřit jako e^V, pro jistý $V \in \mathcal{G}$

- podrobnosti a důkazy lze najít ve standardních učebnicích, zabývajících se Lieovými grupami, např. od Pontryagina apod.