Odvozený homomorfismus Lieových algeber

- jde o důležitý vztah mezi Lieovými algebrami dvou Lieových grup, mezi nimiž existuje homomorfismus $\phi: G \to H$ a protože $\mathrm{Im}\,\phi$ tvoří v H obecně podgrupu, pak také o vztah Lieových algeber LG a její Lieovy podgrupy

<u>Def:</u> <u>Lieova podgrupa</u> H Lieovy grupy G je taková podgrupa, která je zároveň algebraickou podgrupou grupy G v obvyklém významu a také sama o sobě topologickou grupou vzhledem k topologii indukované z G na H jako topologického podprostoru.

<u>Věta:</u> Nechť $\phi: G \to H$ je homomorfismus Lieových grup a $\gamma^V(t) = e^{tV}$ je jednoparametrická podgrupa grupy G pro levoinv. vekt. pole $V \in \mathfrak{g}$. Pak $\phi(\gamma^V(t)) = \phi(e^{tV})$ je jednoparametrická podgrupa grupy H a tedy

$$\phi(e^{tV}) = e^{tW} \quad \text{pro jisté } W \in \mathfrak{h} \text{ (LA grupy } H)$$

a navíc W je dáno push-forwardem $\phi_*: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ jako $W = \phi_* V$ (což plyne z definice ϕ_*)

a dále $\phi_*: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ je homomorfismus Lieových algeber tj. zachovává se komutátor a linearita a jde o tzv. <u>odvozený homomorfismus</u> LA

- dostáváme tak komutační diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\phi_*} & \mathfrak{h} \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{\phi} & H \end{array} \qquad \text{neboli} \qquad \phi(\exp(V)) = \exp(\phi_* V)$$

a tak jako $\mathrm{Im}\,\phi$ je podgrupou H, tak i $\mathrm{Im}\,\phi_*$ je podalgebrou Lieovy algebry $\mathfrak{h}$ (podprostor $\mathfrak{h}$ uzavřený na komutátoru)

- důkaz je např. v učebnici od Ishama

Podgrupy grupy $GL(n,\mathbb{R})$, případně $GL(n,\mathbb{C})$

LG18

- víme, že Lieova algebra $gl(n,\mathbb{R})$ (a podobně $gl(n,\mathbb{C})$) je izomorfní Lieově algebře reálných (komplexních) matic $n \times n$.
- z věty o odvozeném homomorfismu LA plyne, že každá Lieova podgrupa grupy $GL(n,\mathbb{R})$, resp. $GL(n,\mathbb{C})$ má Lieovu algebru danou jako Lieovu podalgebru LA $gl(n,\mathbb{R})$ resp. $gl(n,\mathbb{C})$ tedy je izomorfní s nějakou LA matic $n \times n$.

  (stačí vzít jako homomorfismus ϕ „identické" zobrazení z podgrupy $H \subset GL(n,\mathbb{R})$ jako abstraktní Lieovy grupy do $GL(n,\mathbb{R})$)

- obecně tedy matice C patřící do Lieovy algebry podgrupy $H \subset GL(n,\mathbb{R})$, resp. $GL(n,\mathbb{C})$, dostaneme tak, že dosadíme do podmínky definující danou podgrupu rozvoj

$$x(t) = e^{tC} = 1 + tC + \frac{t^2}{2} C^2 + \dots$$

  a ponecháme členy do řádu t (jako u grupy $SO(3)$ v cvičení) a koeficient u t dává podmínku na C

- přehled klasických lineárních grup

grupa	$GL(n,\mathbb{R})$	$SL(n,\mathbb{R})$	$O(r,s)$ $SO(r,s)$	$O(n)$ $SO(n)$	$Sp(n,\mathbb{R})$	$GL(n,\mathbb{C})$	$SL(n,\mathbb{C})$	$U(n)$	$SU(n)$
podmínka na A	$\det A \neq 0$	$\det A = 1$	$A^T \eta A = \eta$ + $\det A = 1$	$A^T A = 1$ + $\det A = 1$	$A^T \Omega A = \Omega$ ($\det A = 1$)	$\det A \neq 0$	$\det A = 1$	$A^\dagger A = 1$	$A^\dagger A = 1$ + $\det A = 1$
Lieova algebra	$gl(n,\mathbb{R})$	$sl(n,\mathbb{R})$	$o(r,s) \sim so(r,s)$	$o(n) \sim so(n)$	$sp(n,\mathbb{R})$	$gl(n,\mathbb{C})$	$sl(n,\mathbb{C})$	$u(n)$	$su(n)$
podmínka na C	—	$\mathrm{Tr}\, C = 0$	$(\eta C)^T = -\eta C$ + $\mathrm{Tr}\, C = 0$	$C^T = -C$ + $\mathrm{Tr}\, C = 0$	$\Omega C = -C^T \Omega$ ($\mathrm{Tr}\, C = 0$)	—	$\mathrm{Tr}\, C = 0$	$C^\dagger = -C$	$C^\dagger = -C$ + $\mathrm{Tr}\, C = 0$
dimenze	n^2	$n^2 - 1$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$2n^2 + n$	$2n^2$	$2n^2 - 2$	n^2	$n^2 - 1$

general linear

special linear

orthogonal + special

symplectic $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1_{n\times n} \\ -1_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}$

jako reálné Lieovy algebry

unitary

special unitary