Reprezentace Lieových algeber a Lieových grup

Def: Lineární <u>reprezentace Lieovy algebry</u> $\mathcal{G}$ nad tělesem F na prostoru V je homomorfismus $\phi : \mathcal{G} \to End(V)$,

tj. každému prvku $X \in \mathcal{G}$ přiřadíme lin. operátor $\phi(X)$ na V

a platí
1) $\phi(\alpha X + \beta Y) = \alpha \phi(X) + \beta \phi(Y)$ pro $\forall \alpha, \beta \in F$ a $X, Y \in \mathcal{G}$,
2) $\phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$ pro $\forall X, Y \in \mathcal{G}$.

- <u>nulová reprezentace</u> – $\phi(X) = 0$ pro $\forall X \in \mathcal{G}$ (obdoba triviální)
- zvolíme-li ve V bázi a je-li konečněrozměrný, dostaneme <u>maticovou reprezentaci</u> $D(X)$, pro kterou platí 1) a 2) maticově.
  - díky linearitě je repr. plně určena, známe-li, jak jsou reprezentovány prvky báze X_i, $i = 1, \dots, n$, z $\mathcal{G}$, tj. $\phi(X_i)$ nebo $D(X_i)$
  - pojmy reducibilní, ireducibilní, ekvivalentní, úplně reducibilní reprezentace jsou definovány stejně jako pro grupy a platí zde i Schurova lemmata
  - i pro LA platí, že komutativní LA ($[X,Y] = 0$ pro $\forall X, Y \in \mathcal{G}$) mají pouze jednorozměrné komplexní ired. repr.

Def: (Lineární) <u>reprezentace Lieovy grupy</u> G na prostoru V je hladký homomorfismus $\rho : G \to GL(V) = Aut(V)$,

tj. $\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$

přičemž zobrazení z $G \times V \to V$ přiřazující $(g, v) \mapsto \rho(g)v$ je hladké, neboli ρ závisí hladce na parametrech prvku g

- dimenze reprezentace je jako vždy určena $\dim V$ a v bázi V dostaneme maticovou repr. $D(g)$, jejíž prvky jsou hladkými (dokonce analytickými) funkcemi lokálních souřadnic $D_{ij}(g(x^1, \dots, x^n))$, tj. lze rozvíjet do Taylora v okolí g, nejčastěji v okolí identity e.

Vztah reprezentací Lieových grup a jejich algeber (LG20)

- přímočarý je postup od repr. LG k repr. její LA:
  Nechť $D_G(g)$ je d-rozměrná maticová repr. LG G, jejíž odpovídající LA je $\mathfrak{g}$, pak

  1) matice (obdobně i pro operátory např. v QM na Hilbertových prostorech) definované pro lib. $X \in \mathfrak{g}$ jako

$$(*) \qquad D_{\mathfrak{g}}(X) = \frac{d}{dt} D_G\left(e^{tX}\right)\Big|_{t=0}, \quad \left(e^{tX} \in G,\ X \in \mathfrak{g}\right)$$

tvoří d-rozměrnou repr. Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ a pro $\forall X \in \mathfrak{g}$ a $\forall t \in \mathbb{R}$ platí

$$(**) \qquad e^{tD_{\mathfrak{g}}(X)} = D_G\left(e^{tX}\right)$$

[Dk: nejde o nic jiného než o odvozený homomorfismus Lieových algeber, neboť D_G je homomorfismus z G do $\mathrm{Aut}(V)$ d-rozm. prostoru V s určitou bází a $D_{\mathfrak{g}}$ je pak odvozený homomorfismus z $\mathfrak{g}$ do $\mathrm{End}(V)$, tedy repr. $\mathfrak{g}$ na V a díky analytičnosti lze derivovat podle param. t rovnici $(**)$ a dostaneme $(*)$]

  2) Pokud $D_G(g)$ a $D'_G(g)$ jsou dvě ekvivalentní repr. LG G, pak odpovídající repr. LA $\mathfrak{g}$ $D_{\mathfrak{g}}(x)$ a $D'_{\mathfrak{g}}(x)$ jsou též ekvivalentní. Obrácené tvrzení platí tehdy, je-li G souvislá.

[Dk: $\Rightarrow$ Nechť $D'_G(g) = A D_G(g) A^{-1}$ jsou ekvivalentní, pak

$$D'_{\mathfrak{g}}(x) = \frac{d}{dt}\left(A D_G(e^{tx}) A^{-1}\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(A\, e^{tD_{\mathfrak{g}}(x)} A^{-1}\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt} e^{tAD_{\mathfrak{g}}(x)A^{-1}}\Big|_{t=0} = A D_{\mathfrak{g}}(x) A^{-1}$$

a tedy i repr. LA jsou ekvivalentní.

$\Leftarrow$ je-li G souvislá, lze lib. $g \in G$ psát jako konečný součin $g = \prod_{i=1}^{r} e^{t_i X_i}$ pro jisté t_i a $X_i \in \mathcal{G}$

a tedy i $D_G(g) = \prod_{i=1}^{r} D_G(e^{t_i X_i})$ $\quad (+)$

Jsou-li $D_{\mathcal{G}}(X)$ a $D'_{\mathcal{G}}(X)$ ekvivalentní, pak z $(**)$ plyne ekvivalence $D_G(e^{tX})$ a $D'_G(e^{tX})$ pro lib. t a X a dosazením do $(+)$ dostaneme i ekvivalenci pro lib. g.

3) Pokud $D_G(g)$ je reducibilní, resp. úplně reducibilní, resp. ireducibilní repr. LG G, pak $D_{\mathcal{G}}(X)$ je též reducibilní, resp. úplně red., resp. ireducibilní repr. LA $\mathcal{G}$.

[Dk: přímočaře díky ekvivalenci s maticemi $\left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$ pro reducibilní a $\left(\begin{array}{c|c|c} * & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right)$ pro úplně reducibilní repr. a díky tomu, že exponenciála zachovává strukturu těchto matic.]

Obráceně opět jen pro souvislé grupy (na komponentách LG, které nejsou spojeny s identitou, můžeme mít různé reprezentace, které to pokazí).

4) Pokud je $D_G(g)$ unitární repr. LG G, pak $D_{\mathcal{G}}(X)$ je anti-hermitovská repr. LA $\mathcal{G}$ pro $\forall X \in \mathcal{G}$. Obráceně opět pro souvislou grupu.

[Dk: z $D_G^{-1}(g) = D_G^{\dagger}(g)$ dostaneme

$$e^{-t D_{\mathcal{G}}(X)} = e^{t D_{\mathcal{G}}^{\dagger}(X)} \Rightarrow D_{\mathcal{G}}(X) = -D_{\mathcal{G}}^{\dagger}(X)$$]

- pozor! Z výše uvedeného <u>neplyne</u>, že by každá repr. $D_{\mathcal{G}}(X)$ LA $\mathcal{G}$ dávala reprezentaci příslušné LG G pomocí exp. Pouze to, že <u>pokud je $D_G(g)$ repr. grupy G</u>, <u>pak</u> může být $D_G(e^{tX})$ obdržena z $D_{\mathcal{G}}(X)$ pomocí $e^{t D_{\mathcal{G}}(X)}$, a to i tehdy, má-li $e^{t D_{\mathcal{G}}(X)}$ dobrý smysl pro $\forall X \in \mathcal{G}$ a $t \in \mathbb{R}$.

- je vždy nutno ověřit, zda $D_G(e^{tX}) \equiv e^{tD_g(X)}$ (LG22)
splňují stejné relace jako prvky G, tj. že jde o homomorfismus.

- obecně tedy ne všechny repr. příslušné LA g LG G lze získat pomocí (*), tj. derivování nějaké repr. G, (to funguje jen pro jednoduše souvislé grupy)

Př. Pro lineární (maticové) grupy $GL(n,\mathbb{R})$ (a její podgrupy) máme kromě triviální repr. také repr. danou

$$g : A \mapsto \det A \qquad \text{a obecně i } g: A \to (\det A)^\lambda$$

a pro $A = e^{tC}$ dostaneme

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\det e^{tC})^\lambda = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{t\lambda \mathrm{Tr}\, C} = \lambda \mathrm{Tr}\, C$$

což je odpovídající repr. Lieovy algebry $gl(n,\mathbb{R})$.

Př. Ne každá repr. LA $so(2)$ dává repr. LG $SO(2)$

- $so(2)$ je jednorozměrná LA matic 2×2 splňujících $C = -C^T$ a tedy za bázový prvek lze zvolit $L_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a každý prvek $SO(2)$ lze vyjádřit jako $e^{tL_1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ pro $\forall t \in \mathbb{R}$

- $so(2)$ je komutativní (triviálně) a všechny její IR jsou jednorozměrné (tedy komplexní), přičemž

$$D_{so(2)}(L_1) = (z) \quad \text{pro lib. } z \in \mathbb{C}$$

dává různé (neekvivalentní) ired. repr. $so(2)$

- ovšem exponenciálou těchto repr. dostaneme

$$e^{tD_{so(2)}(L_1)} = e^{tz}$$

a aby šlo vskutku o repr. $SO(2)$, muselo by platit

$$e^{(t+2\pi)z} = e^{tz} \quad \left(neboť\ e^{(t+2\pi)L_1} = e^{tL_1}\right)$$

což je ovšem splněno jen pro $z = ik$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$!
tj. $k \in \mathbb{Z}$