Reprezentace SU(2) pomocí působení na homogenních polynomech

LG 23

- obecně lib. grupa $GL(n,\mathbb{R})$ a její lib. podgrupa působí na prostoru $\mathbb{R}^n$ pomocí transf. $\tilde{x}_i = A_{ij} x_j$

  a protože výrazy typu $\tilde{x}_{i_1}^{\alpha_1} \tilde{x}_{i_2}^{\alpha_2} \dots \tilde{x}_{i_r}^{\alpha_r}$ budou lin. kombinací členů $x_{j_1}^{\beta_1} x_{j_2}^{\beta_2} \dots x_{j_s}^{\beta_s}$, kde $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_r = \ell = \beta_1+\beta_2+\dots+\beta_s$

  vidíme, že se homogenní polynomy stupně ℓ budou transformovat mezi sebou a budou tak tvořit invariantní podprostor prostoru všech polynomů v proměnných $x_1 \dots x_n$ při působení dané grupy

  $\Rightarrow$ dostaneme takto (obecně reducibilní) reprezentace dané grupy

  dimenze $\binom{\ell+n-1}{n-1} = \binom{\ell+n-1}{\ell} = \frac{(\ell+n-1)!}{\ell!\,(n-1)!} = d$

  Proč? např. $\ell=3$, $n=4$

  $\times|\times\times||\ \sim\ x_1 x_2^2$

  $|\times\times|\times|\ \sim\ x_2^2 x_3$

  $|||\times\times\times\ \sim\ x_4^3$

  ℓ proměnných

  $n-1$ přepážek

- obecně se funkce $f(x_1,\dots x_n)$ při transformaci $\tilde{x}_i = A_{ij} x_j$ ztransformují na funkci

  $$\tilde{f}(x) = U(A) f(x) = f(A^{-1}x)$$

  $U(A)$ … operátor odp. prvku $A \in G$

  a reprezentaci konstruujeme pomocí tohoto vztahu aplikací na jistou bázi v podprostoru homog. polynomů, např. $x_1^\ell, x_1^{\ell-1} x_2, \dots$

- obdobně pro $GL(n,\mathbb{C})$ přes působení na polynomech v komplexních proměnných $z_1,\dots,z_n$

- uvažujme nyní grupu SU(2)

  - obecný prvek lze psát jako

  $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad |a|^2+|b|^2 = 1$$

  Proč? z $AA^+ = 1 = A^+A$

  pro $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dostaneme $|a| = |d|$ a $|b| = |c|$

  a pak pro $A = \begin{pmatrix} |a|e^{i\alpha_1} & |b|e^{i\beta_1} \\ |b|e^{i\beta_2} & |a|e^{i\alpha_2} \end{pmatrix}$ z $AA^+ = 1$ a $\det A = 1$

  $\Rightarrow e^{i(\beta_1-\alpha_1-\alpha_2+\beta_2)} = -1$

  $|a|^2 e^{i(\alpha_1+\alpha_2)} - |b|^2 e^{i(\beta_1+\beta_2)} = 1$

  $\Rightarrow (|a|^2+|b|^2)(e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}) = 1 \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2 = 0$, $\alpha_2 = -\alpha_1$

  a podobně pro β_2 a β_1 pak $e^{i(\beta_1+\beta_2)} = -1 \Rightarrow \beta_2 = \pi - \beta_1$

  který působí na $\mathbb{C}^2$:

  $$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a z_1 + b z_2 \\ -b^* z_1 + a^* z_2 \end{pmatrix}$$

  a též na funkcích $f(z)$ pomocí

  $$\tilde{f}(z) = U_A f(z) = f(a^* z_1 - b z_2,\ b^* z_1 + a z_2)$$

  neboť $A^{-1} = A^+ = \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix}$

LG24

• standardní volba báze homogenních polynomů stupně $l=2j$, $j=0,\frac{1}{2},1$

je
$$\psi^j_\mu(z) = \frac{z_1^{j+\mu}\, z_2^{j-\mu}}{\sqrt{(j+\mu)!\,(j-\mu)!}} \qquad \text{pro } \mu=-j,\dots,j$$

(normalizační faktor zvolen tak, aby byla repr. unitární)

• pro $l=0=j$: $\psi^0_0(z)=1$ ... triviální reprezentace

$l=1=2j$: $\psi^{\frac12}_{-\frac12}(z)=z_2$, $\psi^{\frac12}_{\frac12}(z)=z_1$

a tedy
$$U_A\psi^{\frac12}_{-\frac12}(z) = b^*z_1 + a z_2 = a\,\psi^{\frac12}_{-\frac12}(z) + b^*\psi^{\frac12}_{\frac12}(z) = \sum_{\mu=-j}^{j}\psi^{\frac12}_\mu\, D^{(\frac12)}_{\mu,-\frac12}(A)$$

$$U_A\psi^{\frac12}_{\frac12}(z) = a^*z_1 - b z_2 = -b\,\psi^{\frac12}_{-\frac12}(z) + a^*\psi^{\frac12}_{\frac12}(z) = \sum_{\mu=-j}^{j}\psi^{\frac12}_\mu\, D^{(\frac12)}_{\mu,\frac12}(A)$$

neboli
$$D^{(\frac12)}(A) = \begin{array}{c|cc} & -\frac12 & \frac12 \\ \hline -\frac12 & a & -b \\ \frac12 & b^* & a^* \end{array}$$
což je repr. ekvivalentní maticím A pomocí $S=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$l=2=2j$: $\psi^1_{-1}(z)=\frac{z_2^2}{\sqrt2}$, $\psi^1_0(z)=z_1z_2$, $\psi^1_1(z)=\frac{z_1^2}{\sqrt2}$

obdobným postupem bychom dostali
$$D^{(1)}(A) = \begin{array}{c|ccc} & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & a^2 & -\sqrt2\, ab & b^2 \\ 0 & \sqrt2\, ab^* & |a|^2-|b|^2 & -\sqrt2\, a^*b \\ 1 & (b^*)^2 & \sqrt2\,(ab)^* & (a^*)^2 \end{array}$$

neboť např.
$$U_A\psi^1_0 = (a^*z_1 - bz_2)(b^*z_1 + az_2) = -ba\, z_2^2 + (|a|^2-|b|^2)\, z_1z_2 + a^*b^*\, z_1^2 = \psi^1_{-1}D^{(1)}_{-10} + \psi^1_0 D^{(1)}_{00} + \psi^1_1 D^{(1)}_{10}$$

obecně (viz Wigner: Group Theory ... 1959)
$$U_A\psi^j_\mu(z) = \frac{(a^*z_1-bz_2)^{j+\mu}\,(b^*z_1+az_2)^{j-\mu}}{\sqrt{(j+\mu)!\,(j-\mu)!}} =$$
$$= \sum_{\mu'}\psi^j_{\mu'}(z)\underbrace{\sum_{\substack{k \\ \text{kde má smysl}}} (-1)^k \frac{\sqrt{(j+\mu)!\,(j-\mu)!\,(j+\mu')!\,(j-\mu')!}}{k!\,(j-\mu'-k)!\,(j+\mu-k)!\,(k+\mu'-\mu)!}\, a^{j-\mu'-k}\,(a^*)^{j+\mu-k}\cdot b^k\,(b^*)^{k+\mu'-\mu}}_{D^{(j)}_{\mu'\mu}(A)}$$

speciálně pro $\mu'=j$ (dolní řádek)
(pouze $k=0$)
$$D^{(j)}_{j\mu}(A) = \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+\mu)!\,(j-\mu)!}}\,(a^*)^{j+\mu}\,(b^*)^{j-\mu}$$

• lze ukázat (opět viz Wigner, kap. 15), že jde o unitární, ireducibilní komplexní reprezentace grupy $SU(2)$ a že takto dostaneme všechny IR této grupy

– např. ireducibilita se ukáže tak, že jediná matice, která komutuje se všemi $D^{(j)}(A)$ je násobkem $\mathbb{1}$, neboť speciálně pro $b=0$, $a=e^{-\frac{1}{2}i\varphi}$ máme

(*)
$$D^{(j)}_{\mu'\mu}\left(A(b=0, a=e^{-\frac{1}{2}i\varphi})\right) = \delta_{\mu'\mu}\, e^{i\mu\varphi}$$

a má-li být $S D^{(j)} = D^{(j)} S$, musí být S diagonální, a protože $D^{(j)}_{j\mu}(A)$ jsou obecně všechny nenulové (pro obecné a b), musí být i všechny prvky S na diagonále si rovny, neboť musí platit $D^{(j)}_{j\mu} S_{\mu\mu} = S_{jj} D^{(j)}_{j\mu}$ pro $\forall \mu=-j,\dots,j$

takže $S_{\mu\mu} = S_{jj}$ pro $\forall\mu$ a S musí být násobkem $\mathbb{1}$.

• charakter těchto reprezentací, tj. stopa matic $D^{(j)}(A)$, závisí pouze na úhlu φ při parametrizaci A pomocí

$$a = \cos\frac{\varphi}{2} - i n_3 \sin\frac{\varphi}{2}, \quad b = -n_2 \sin\frac{\varphi}{2} - i n_1 \sin\frac{\varphi}{2}$$

odpovídající „otočení" o úhel φ kolem osy $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$

(neboť jsme již dříve našli jednopar. podgrupy
$$A(\vec{n},\varphi) = e^{\varphi \vec{n}.\vec{L}} = \mathbb{1}\cos\frac{\varphi}{2} - i(\vec{n}.\vec{\sigma})\sin\frac{\varphi}{2}, \text{ kde } \vec{L} = -\frac{i}{2}\vec{\sigma}\,)$$

protože 2 prvky $SU(2)$ patří do stejné třídy sdružených prvků, právě když odpovídají rotacím o stejný úhel (viz níže) a protože matice dané (*) odpovídají rotaci kolem $\vec{n}=(0,0,1)$ o úhel φ, dostaneme

$$\chi^{(j)}(\varphi) = Tr\, D^{(j)}(A(z,\varphi)) = \sum_{\mu=-j}^{j} e^{i\mu\varphi} = \frac{\sin(j+\frac{1}{2})\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

– pomocí charakterů, pro které platí také relace ortogonality jako u konečných grup (je nutné zavést levoinvariantní míru pro integraci na grupě) lze ukázat, že jde o všechny IR, neboť $\chi^{(j)}(\varphi)$ tvoří úplnou bázi na prostoru funkcí úhlu φ na intervalu $\langle 0, 2\pi)$

LG26

- reprezentace Lieovy algebry $su(2)$ lze získat přímo z $D^{(j)}(A(\vec{n},\varphi))$, které odpovídají jednopar. podgrupám parametrizovaným úhlem φ, derivací těchto matic podle φ pro $\varphi=0$, např. pro $\vec{n}=(0,0,1)$ bychom

z $D^{(j)}_{\mu'\mu}(z,\varphi) = \delta_{\mu'\mu}\, e^{i\mu\varphi}$ dostali

otočení kolem osy z

$$D^{(j)}(L_3) = \frac{d}{d\varphi}\Big|_{\varphi=0} D^{(j)}(z,\varphi) = i\begin{pmatrix} -j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -j+1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & j \end{pmatrix}$$

(což je antihermiteovská matice (jak by měla být pro reálné LA), v kvantové mechanice bychom použili hermiteovskou variantu $-i\,D^{(j)}(L_3)$.

Reprezentace SO(3) z repr. SU(2)

- ired. repr. SO(3) lze konstruovat i přímo jako řešení Laplaceovy rovnice
$$\Delta f(x,y,z) = 0 \quad (\text{která je invariantní při rotacích})$$
ve formě homogenních polynomů určitého stupně l

$\Rightarrow$ ve sfér. souř. jde o řešení $f = r^l Y_{lm}(\theta,\varphi)$, kde

Y_{lm} jsou známé kulové fce splňující rovnici
$$L^2 Y_{lm} = -\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) Y_{lm} = l(l+1)\, Y_{lm}$$

která má $2l+1$ nezávislých řešení pro $m=-l,\dots,l$, přičemž

závislost na φ je dána pomocí $Y_{lm} = \frac{\Theta_{lm}(\theta)}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$

- lze ukázat, že těchto $2l+1$ nezávislých řešení tvoří bázi IR grupy SO(3)

tj. $$U(\vec{n},\varphi)\, r^l Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sum_{m'=-l}^{l} D^{(l)}_{m'm}(\vec{n},\varphi)\, r^l Y_{lm'}(\theta,\varphi)$$

(např. tak, že jediná matice komut. s $D^{(l)}$ je násobkem jednotkové)

a navíc jde o všechny IR (z relací ortog. pro charaktery - viz Wigner)

- Tyto IR lze získat též z IR grupy SU(2), neboť víme, že existuje 2-1 homomorfismus mezi SU(2) a SO(3) (matici A a $-A$ odpovídá jediná)

- matici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$ odpovídá matice
$$R_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a^2+a^{*2}-b^2-b^{*2}) & \frac{i}{2}(a^2-a^{*2}+b^2-b^{*2}) & a^*b^*+ab \\ \frac{i}{2}(a^{*2}-a^2+b^2-b^{*2}) & \frac{1}{2}(a^2+a^{*2}+b^2+b^{*2}) & i(a^*b^*-ab) \\ -(a^*b+ab^*) & i(a^*b-ab^*) & (aa^*-bb^*) \end{pmatrix}$$

- z repr. SU(2) daných maticemi $D^{(j)}_{\mu'\mu}(A)$ lze získat repr. SO(3) pro rotaci R_A danou např. Euler. úhly α,β,γ např. pomocí substituce
$$a = e^{-i\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\beta}{2}\, e^{-i\frac{\gamma}{2}}, \quad b = -e^{-i\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\beta}{2}\, e^{i\frac{\gamma}{2}}$$

avšak pozor!, jednoznačné repr. pouze pro celočíselné j, pro které
$$D(A) = D(-A), \quad \text{pro poločíselné je } D(-A) = -D(A)$$
a tedy dostáváme tzv. dvojznačné repr. SO(3)

LG28

- jiná možnost než $D(A) = \pm D(-A)$ není díky Schur. lemmatu, neboť musí platit $D(A)D(-\mathbb{1}) = D(-\mathbb{1})D(A)$ ($-\mathbb{1}$ komutuje s A)

$$\Rightarrow D(-\mathbb{1}) = \lambda \mathbb{1} \quad \text{a navíc } D^2(-\mathbb{1}) = \mathbb{1} \quad \text{a tedy } \lambda^2 = 1, \ \lambda = \pm 1$$

- dostaneme takto všechny IR grupy SO(3), pokud máme všechny IR SU(2)

Př

$$D^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2}\, e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}} & -\sin\frac{\beta}{2}\, e^{-i\frac{\alpha-\gamma}{2}} \\ \sin\frac{\beta}{2}\, e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}} & \cos\frac{\beta}{2}\, e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \end{pmatrix} = -D^{1/2}(\alpha+2\pi,\beta,\gamma)$$

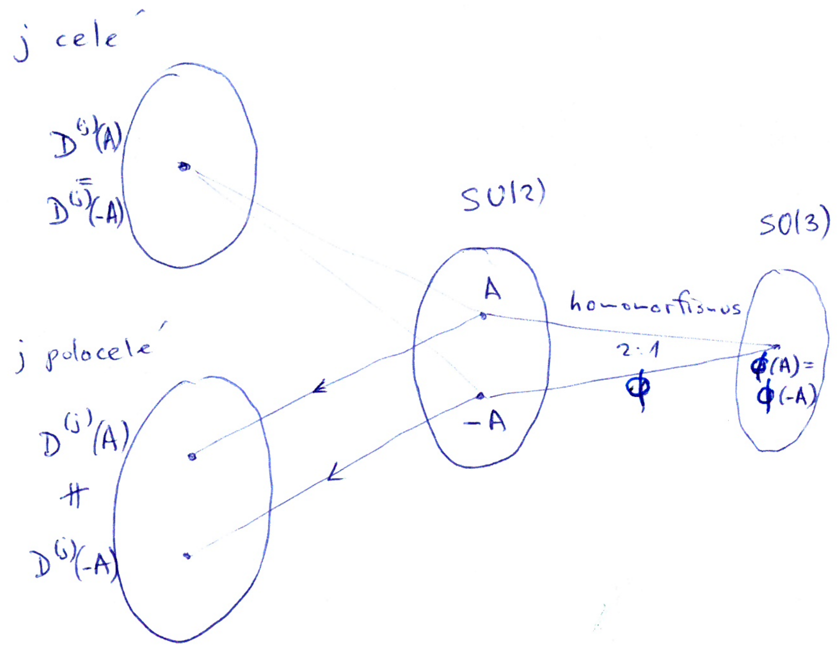
[vyskočí faktory $e^{i\pi}$ nebo $e^{-i\pi}$ „-1"]

víme

$$A(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\gamma}{2}} \end{pmatrix}$$

odpovídá rotaci kolem z o α; kolem y o β; kolem z o γ

- obecně tedy „celočíselné" ($j = 0, 1, 2 ..$) repr. SU(2) dávají IR grupy SO(3)
  „poločíselné" ($j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} ...$) repr. SU(2) dávají dvojznačné repr. SO(3) (nejde o repr. SO(3) v pravém slova smyslu)



neboli 1) každá repr. SO(3) dává též repr. SU(2) pomocí Φ

2) každá repr. SU(2), pro niž $D(A) = D(-A)$ dává repr. SO(3)

3) existují repr. SU(2), pro něž $D(A) = -D(-A)$ – tyto dávají dvojznačné repr. SO(3)

Třídy sdružených prvků grup SU(2), SO(3) a O(3)

LG29

Rotace ve 3-rozm. prostoru

$$D(\vec{n},\varphi)_{jk} = \delta_{jk}\cos\varphi + n_j n_k (1-\cos\varphi) + \varepsilon_{jkl} n_l \sin\varphi$$

$n_i n_i = 1$

$-\pi < \varphi \le \pi$

$n_3 > 0 \wedge (n_3 = 0 \wedge n_2 > 0) \wedge (n_3 = n_2 = 0 \wedge n_1 = 1)$

odpovídající matice $A(\vec{n},\varphi) \in SU(2)$ jsou

$$A(\vec{n},\varphi) = \mathbb{1}\cos\frac{\varphi}{2} + i\, n_j \sigma_j \sin\frac{\varphi}{2}$$ ovšem nyní $-2\pi < \varphi \le 2\pi$

tj. 1 rotaci ve R^3 odpovídají 2 matice A a $-A$, neboli φ a $\varphi + 2\pi$ odpovídají stejné $D(\vec{n},\varphi)$

<u>Třídy</u>: 2 prvky SU(2) patří do stejné třídy sdružených prvků, ~~pokud~~ právě když odpovídají rotacím o stejný úhel (tj. obě rotace mají stejné $|\varphi|$). Obdobně pro 2 rotace z SO(3). Konečně 2 prvky z O(3) patří do stejné třídy, právě když mají stejné $|\varphi|$ (u nevlastních rotací vezmeme část, která je vlastní rotací) a navíc pokud jsou buď obě vlastní, nebo obě nevlastní rotace.

<u>Dk</u>: Pro SU(2): pro 2 prvky ze stejné třídy musí platit

$$\mathrm{Tr}\, A(\vec{n}_1,\varphi_1) = \mathrm{Tr}\, A(\vec{n}_2,\varphi_2) \quad \text{neboli} \quad 2\cos\frac{\varphi_1}{2} = 2\cos\frac{\varphi_2}{2}$$

pro $-2\pi \le \varphi_1,\varphi_2 \le 2\pi$ to platí pouze tehdy, pokud $|\varphi_1| = |\varphi_2|$

a tedy <u>nutnou</u> podmínkou je $|\varphi_1| = |\varphi_2|$

Je to ale i postačující podmínka, neboť vlastní čísla $A(\vec{n}_1,\varphi_1)$ jsou $e^{i\frac{\varphi_1}{2}}$ a $e^{-i\frac{\varphi_1}{2}}$

což jsou též vlastní čísla $A(\vec{n}_2,\varphi_2)$, pokud $|\varphi_1| = |\varphi_2|$

$$\Rightarrow \text{existují } S_1 \text{ a } S_2 \in SU(2):\ S_1 A(\vec{n}_1,\varphi) S_1^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi_1}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi_1}{2}} \end{pmatrix} = S_2 A(\vec{n}_2,\varphi_2) S_2^{-1}$$

neboli $$A(\vec{n}_1,\varphi) = (S_1^{-1} S_2)\, A(\vec{n}_2,\varphi_2)\, (S_1^{-1} S_2)^{-1}$$ a protože $S_1^{-1} S_2 \in SU(2)$

jde o sdružené prvky.

pro SO(3) máme podobný vztah díky homomorfismu z SU(2) na SO(3)

a nutnou podmínkou nyní je $1 + 2\cos\varphi_1 = 1 + 2\cos\varphi_2$ $\quad \varphi_1,\varphi_2 \in \langle -\pi,\pi \rangle$

a dostáváme opět, že $|\varphi_1| = |\varphi_2|$

pro O(3) by sice mohlo být $$\underbrace{-1 + 2\cos\varphi_S}_{\text{nevlastní}} = \underbrace{1 + 2\cos\varphi_R}_{\text{vlastní rotace}}$$

pro jisté $|\varphi_S| \neq |\varphi_R|$ ovšem nevlastní a vlastní rotace nelze převést jednu na druhou, neboť podobnostní transformace zachovává determinant, a ten je ± 1