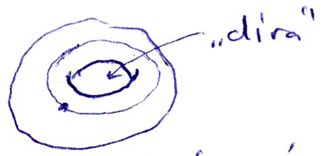
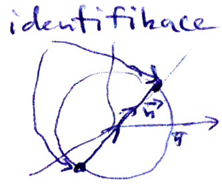
Poznámky k univerzální pokrývací grupě

- připomenutí: Lieova grupa G je souvislá, pokud libovolné dva prvky G lze spojit spojitou křivkou, a jednoduše souvislá, pokud každá uzavřená křivka na G lze „smrsknout" do bodu

jednoduše souvislá grupa



grupa, která není jednoduše souvislá



Př. $SO(3)$ není jednoduše souvislá, ale je souvislá

$O(3)$ není ani souvislá, má 2 komponenty souvislosti ($\det A = 1$, $\det A = -1$)

Def: Centrální invariantní (normální) podgrupa (Lieovy) grupy G, neboli centrum $Z(G)$, je podgrupa všech prvků, které komutují se všemi prvky G.

tj. $$Z(G) = \{ g \in G : hg = gh \text{ pro } \forall h \in G \}$$

- přímo z definice plyne, že $Z(G)$ je abelovská a normální podgrupa grupy G

Věta: (základní výsledek týkající se univerzální pokrývací grupy)

Nechť G je souvislá Lieova grupa. Pak existuje jediná (až na izomorfismus) jednoduše souvislá Lieova grupa $\tilde{G}$ taková, že

1) G je izomorfní faktor-grupě $\tilde{G}/K$, kde K je diskrétní centrální invariantní podgrupa $\tilde{G}$,

2) pokud je G jednoduše souvislá, je $\tilde{G}$ izomorfní s G,

3) reálná Lieova algebra Lieovy grupy $\tilde{G}$ je izomorfní reálné Lieově algebře grupy G (lokálně kolem identit jsou tedy G a $\tilde{G}$ „stejné"),

4) každá reprezentace reálné LA grupy $\tilde{G}$ je LA nějaké reprezentace Lieovy grupy $\tilde{G}$.

- Díky jednoznačnosti se grupě $\tilde{G}$ říká univerzální pokrývací grupa a říkáme, že G je pokryta grupou $\tilde{G}$.

- příklad jsme viděli pro dvojnásobné pokrytí grupy $SO(3)$ (L^+) grupou $SU(2)$ $(SL(2,\mathbb{C}))$

LG 31

- vztah mezi reprezentacemi G a $\tilde{G}$:

Reprezentace grupy $\tilde{G}$ dává reprezentaci grupy G pomocí homomorfismu $\phi: \tilde{G} \to G$ s jádrem $\mathrm{Ker}\,\phi = K$, (který dává pokrytí G grupou $\tilde{G}$), tj. $D_G(\phi(g)) = D_{\tilde{G}}(g)$ pro $\forall \phi(g) \in G$

<u>pokud</u> pro lib. $k \in K$ platí

$$D_{\tilde{G}}(g) = D_{\tilde{G}}(gk) \quad \text{pro } \forall g \in \tilde{G}$$

tj. v dané repr. grupy $\tilde{G}$ jsou všechny prvky této grupy, které dostaneme z g násobením prvky z K, reprezentovány stejnou maticí

- pokud tomu tak není, mluví se (zvláště ve fyzikálních aplikacích) o víceznačných reprezentacích

<u>Př.</u> viz vztah reprezentací $SU(2)$ a $SO(3)$

- lze též ukázat, že pokud jsou Lieovy algebry $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$ dvou jednoduše souvislých Lieových grup $\tilde{G}_1$ a $\tilde{G}_2$ izomorfní, pak i $\tilde{G}_1$ a $\tilde{G}_2$ jsou izomorfní grupy a říkáme, že $\tilde{G}(\sim\tilde{G}_1\sim\tilde{G}_2)$ je též univerzální pokrývací grupou Lieovy algebry $\mathcal{G}(\sim\mathcal{G}_1\sim\mathcal{G}_2)$

tj. ke každé reálné Lieově algebře $\mathcal{G}$ existuje jediná (až na izomorfismus) jednoduše souvislá Lieova grupa $\tilde{G}$

- obecně ne každá univerzální pokrývací grupa $\tilde{G}$ je nějakou lineární (tj. maticovou) Lieovou grupou, ani když Lieova grupa G, která je $\tilde{G}$ pokryta, je lineární grupou