

Cvičení: indukované reprezentace grupy C_{3v} z IR podgrupy $H = \{E, \sigma_v\}$

- grupa C_{3v} není přímým součinem dvou svých podgrup, ale jen polopřímým součinem, je ovšem možné získat IR této grupy z IR podgrupy $H = \{E, \sigma_v\}$ pomocí indukce, využijeme-li toho, že každá grupa má triviální IR

- podgrupa H má dvě IR

H	E	σ_v
A'	1	1
A''	1	-1

a grupu C_{3v} lze rozložit na levé třídy pomocí

$$C_{3v} = \underbrace{E}_g H + \underbrace{C_3}_g H + \underbrace{C_3^2}_g H = \{E, \sigma_v\} + \{C_3, \sigma_v'\} + \{C_3^2, \sigma_v''\}$$

- pro získání charakterů indukovaných reprezentací $A' \uparrow C_{3v}$ a $A'' \uparrow C_{3v}$ není třeba konstruovat matice těchto repr., ale použijeme přímo vzorec

$$\chi^{A' \uparrow G}(g) = \sum_{s=1}^M \delta_{ss}(g) \chi_H^A(g_s^{-1} g g_s)$$

kde $M = \frac{\#G}{\#H} = 3$, $g_1 = E, g_2 = C_3, g_3 = C_3^2$ a $\delta_{ss}(g) = 1$ pro $g_s^{-1} g g_s \in H$ a 0 jindy

- pro $g = C_3$ nemůžeme sdružením dostat E , nebo σ_v a tedy charakter pro C_3 budou nulové

- pro $g = E$ dostaneme dimenzi induk. repr., zde $3 = M$, neboť A' i A'' jsou jednorozměrné

- pro $g = \sigma_v$ máme $E \sigma_v E = \sigma_v, C_3^2 \sigma_v C_3 = \sigma_v' \notin H, C_3 \sigma_v C_3^2 = \sigma_v'' \notin H$
takže $\chi^{A' \uparrow C_{3v}}(\sigma_v) = \chi_H^{A'}(\sigma_v) = 1, \chi^{A'' \uparrow C_{3v}}(\sigma_v) = \chi_H^{A''}(\sigma_v) = -1$

- celkem

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
$A' \uparrow C_{3v}$	3	0	1
$A'' \uparrow C_{3v}$	3	0	-1
A_1	1	1	1
E	2	-1	0
A_2	1	1	-1

$$\begin{aligned} &= A_1 \oplus E \\ &= A_2 \oplus E \\ &\Rightarrow \alpha_{A_1}^{A' \uparrow C_{3v}} = \frac{1}{6}(3+3) = 1 \Rightarrow \\ &= \chi^{A' \uparrow C_{3v}} - \chi^{A_1} \Rightarrow \alpha_E^{A' \uparrow C_{3v}} = 1 \\ &= \chi^{A'' \uparrow C_{3v}} - \chi^E \end{aligned}$$

tyto dvě IR plynou z výše uvedených

- výsledek je v souladu s Frobeniovým recipročním teorémem, neb jsme v subdukce z C_{3v} na H
měli $A_1 \downarrow H = A', A_2 \downarrow H = A'', E \downarrow H = A' \oplus A''$