

Cvičení na levoinvariantní vektorová pole

LG7

1) Uvažujme grupu $G = (\mathbb{R}, +)$ a označme globální souřadnici x

Ukažme, že vektorové pole $V_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ je levoinvariantní,

ovšem $V_2 = x \frac{\partial}{\partial x}$ není.

- levé posunutí na G $L_{g_0}: g \mapsto h = g_0 + g$ neboli souřadnicově $x_h = x_0 + x_g$

- podmínka levoinvariantnosti vekt. pole $V = V(x) \frac{\partial}{\partial x}$,

tj. $(L_{g_0})_* V = V$ má v souřadnicích tvar

$$V(x_h(x_g)) = J(x_g) V(x_g)$$

kde Jacobian $J(x_g) = \frac{\partial x_h}{\partial x_g} = 1$

atedy musí být splněna podmínka $V(x_0 + x_g) = V(x_g)$

- pro V_1 je $V_1(x) = 1$ a tedy podmínka je splněna

kdežto pro V_2 je $V_2(x) = x$ a tedy $x_0 + x_g \neq x_g$

a podmínka není splněna.

2) Levoinvariantní pole na $G = (\mathbb{R}^+, \cdot)$

- nyní x_g $x_h = x_0 x_g$ a tedy $J(x_g) = \frac{\partial x_h}{\partial x_g} = x_0$

a podmínka levoinvariantnosti vekt. pole $V = V(x) \frac{\partial}{\partial x}$

nyní je $V(x_h) = V(x_0 x_g) = J(x_g) V(x_g) = x_0 V(x_g)$

a zvolíme-li $g = e$ ($x_g = 1$) a $V_e = c \frac{\partial}{\partial x}$, $c \in \mathbb{R}$ (jde o obecný vektor v e)

dostaneme $V(x_0 x_g) = V(x_0) = x_0 V(x_e) = c x_0$

- obecně levoinv. vekt. pole tedy je $V = c x \frac{\partial}{\partial x}$

Levoinvariantní vektorová pole grupy $GL(n, \mathbb{R})$

LG8

- jde o grupu všech reálných matic $n \times n$ s $\det A \neq 0$ s grupovou operací násobení matic
- pro $n > 1$ jde o neabelovskou grupu dimenze n^2 (pro $n=1$ jde o grupu $(\mathbb{R}^+, \cdot)$)
- je izomorfní grupě $GL(V)$ všech automorfismů reálného n -dimenzionálního vektorového prostoru V (stačí zvolit vhodnou bázi na V)
- jde o nespojitou, nekompatní grupu ($\det A$ může být kladný (souvislá podgrupa $GL^+(n, \mathbb{R})$) i záporný)
 - největší kompaktní podgrupa je $O(n)$

- levoinvariantní pole - použijeme globální parametrizaci
 $x^i_j = a_{ij}$, a tedy $L_{g_0}: g \mapsto g_0 g = h$ v dalším budeme
vynásobit sumu
odpovídá $(x_h)^i_j = \sum_{k=1}^n (x_0)^i_k (x_g)^k_j = (x_0)^i_k (x_g)^k_j$

- Jacobian je
$$\frac{\partial (x_h)^i_j}{\partial (x_g)^k_m} = (x_0)^i_k \delta^k_l \delta^m_j = (x_0)^i_l \delta^m_j$$

a tedy podmínka levoinvariantnosti je

$$V(x_h)^i_j = V(x_0 x_g)^i_j = (x_0)^i_l \delta^m_j V(x_g)^l_m$$

a volbou $g = e$, tj. $x_g = \mathbb{1}_{n \times n}$, a $V(x_e)^l_m = C^l_m$ matice
parametrů
obecného vektoru

nakonec dostaneme

$$V(x_0)^i_j = (x_0)^i_l C^l_j$$

$$V_e = C^l_m \frac{\partial}{\partial x^l_m}$$

neboli levoinvariantní vekt. pole na $GL(n, \mathbb{R})$ jsou

obecně dány jako

$$V_c = x^i_l C^l_j \frac{\partial}{\partial x^i_j} = C^l_j V^j_l, \text{ kde } V^j_l = x^i_l \frac{\partial}{\partial x^i_j}$$

tvorí bázi n^2 nezávislých levoinv. vekt. polí

Lieova algebra grupy $GL(n, \mathbb{R})$

(LG9)

- je tvořena Lieovou algebrou levoinvariantních vekt. polí

s bází $V^j_e = x^i_e \frac{\partial}{\partial x^i_j} = x^i_e \partial^j_i$ a komutátorem

báze

$$[V^i_j, V^k_e]f = x^r_j \partial^i_r (x^s_e \partial^k_s f) - x^s_e \partial^k_s (x^r_j \partial^i_r f) = \text{druhé derivace se odečtou}$$

$$= x^r_j \delta^s_r \delta^i_e \partial^k_s f - x^s_e \delta^k_j \delta^i_r \partial^i_r f =$$

$$= (\delta^i_e V^k_j - \delta^k_j V^i_e) f$$

určují strukturální konstanty LA " c^k_{ij} "
(zde by měly dvojité indexy)

a dále obecně

$$[V_c, V_D] = [c^i_j V^j_i, d^k_e V^e_k] = c^i_j d^k_e (\delta^j_k V^e_i - \delta^e_i V^j_k) =$$

$$= c^i_k d^k_e V^e_i - d^k_i c^i_j V^j_k = [c, D]^i_e V^e_i = V_{[c, D]}$$

neboli komutátoru dvou levoinv. vekt. polí daných

obecnými maticemi C a D odvozuje levoinv. pole dává $[C, D]$

- protože navíc triviálně $V_{\alpha C + \beta D} = \alpha V_C + \beta V_D$, pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

je Lieova algebra matic $n \times n$ s komutátorem $[C, D] = CD - DC$

izomorfní s Lieovou algebrou levoinv. vekt. polí na $GL(n, \mathbb{R})$

$\Rightarrow$ mluvíme o jediné Lieově algebře Lieovy grupy $GL(n, \mathbb{R})$,

kterou značíme $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, at' už máme

na mysli matice či levoinv. vekt. pole

neboli máme izomorfis-y

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathcal{L}(GL(n, \mathbb{R})) \sim T_e(GL(n, \mathbb{R})) \sim \text{End}(\mathbb{R}^n)$$

levoinv. v. pole

tečný prostor
v identitě

endomorfis-y
na $\mathbb{R}^n$ dává
maticemi $n \times n$

(ovšem s komutátorem

$$[V_e, W_e] = [V, W]_e$$