

# Cvičení: Pokrytí grup $SO(3)$ a $SU(2)$ exponenciálním zobrazením (LG13)

1)  $SO(3)$  - grupa ortogonálních matic  $A^T A = A A^T = \mathbb{1}$  s  $\det A = 1$

- jde o 3-rozměrnou LG parametrizovanou např.

Eulerovými úhly, nebo ~~směrem~~<sup>osou</sup> otáčení  $\vec{n}$  a úhlem  $\varphi$

- jde o podgrupu  $GL(3, \mathbb{R})$  a i zde bude LA levoinv. vekt. poli  
izomorfní LA určitých matic  $C$ , které tvoří podalgebru  
všech reálných matic  $n \times n$ , tj.  $\mathfrak{so}(3) \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$

- matice  $C$  lze určit tak, že budeme uvažovat

jednoparametrickou podgrupu  $A(t) = e^{tC} = 1 + tC + \dots$

a dosadíme do podmínky  $A^T A = \mathbb{1}$

neboli  $(1 + tC^T + \dots)(1 + tC + \dots) = \mathbb{1}$

z čehož dostáváme podmínku

$$C^T + C = 0 \quad \text{neboli} \quad C = -C^T$$

a tedy LA  $\mathfrak{so}(3)$  je tvořena antisymetrickými

reálnými maticemi  $3 \times 3$  s nulovými prvky na

diagonále (takže  $\text{Tr} C = 0$  a podmínka  $\det A = 1$ ,  
která vede na podmínku  $\text{Tr} C = 0$  již dále  
neomezuje)

a prvky pod diagonálou jsou určeny těmi nad diagonálou

- dimenze je tedy 3, jak lze očekávat z dimenze  $SO(3)$

- obecně pro  $SO(n)$  bychom dostali totéž, a dimenze

$\mathfrak{so}(n)$  by byla rovna počtu maticových prvků

nad diagonálou, tedy  $\dim \mathfrak{so}(n) = \frac{n(n-1)}{2}$

- jako standardní báze  $\mathfrak{so}(3)$  se volí matice s prvky

$$(L_i)_{jk} = -\varepsilon_{ijk} \quad \text{neboli}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

s komutatory

$$[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} L_k \quad \text{a tedy struktura konstanty jsou}$$

$$c_{ij}^k = \varepsilon_{ijk}$$

- jednoparametrické podgrupy pro obecný prvek

LA  $so(3)$  daný maticí  $C = \varphi \vec{n} \cdot \vec{L}$ , kde  $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$  jsou dány ( $\varphi$  zde můžeme brát u roli  $t$ ) a  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$  je jednotkový vektor

$$A(\vec{n}, \varphi) = e^{\varphi \vec{n} \cdot \vec{L}} = 1 + \varphi \vec{n} \cdot \vec{L} + \frac{\varphi^2}{2!} (\vec{n} \cdot \vec{L})^2 + \dots$$

s využitím  $(L_k)_{ij} = -\epsilon_{kij}$  a  $\sum_s \epsilon_{ijs} \epsilon_{kss} = \delta_{ik} \delta_{je} - \delta_{ie} \delta_{jk}$

dostaneme

$$(\vec{n} \cdot \vec{L})_{ij} = -\sum_{k=1}^3 n_k \epsilon_{kij}$$

$$(\vec{n} \cdot \vec{L})^2_{ij} = \sum_{k \neq s} (-n_k \epsilon_{kis}) (-n_s \epsilon_{ksj}) = -\delta_{ij} + n_i n_j$$

$$(\vec{n} \cdot \vec{L})^3_{ij} = \sum_s (-\delta_{is} + n_i n_s) \left( \sum_k n_k \epsilon_{ksj} \right) = \sum_k n_k \epsilon_{kij} = -(\vec{n} \cdot \vec{L})_{ij}$$

$$(\vec{n} \cdot \vec{L})^4_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j = -(\vec{n} \cdot \vec{L})^2_{ij}$$

$$(\vec{n} \cdot \vec{L})^5_{ij} = (\vec{n} \cdot \vec{L})_{ij} \text{ atd.}$$

a tedy

$$A(\vec{n}, \varphi) = \delta_{ij} \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots \right) + n_i n_j \left( \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^4}{4!} + \dots \right) - \sum_k n_k \epsilon_{kij} \left( \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \dots \right)$$

což je matice reprezentující rotaci kolem  $\vec{n}$  o úhel  $\varphi$  ve 3D

(vzorce  $\vec{x}' = \vec{x} \cos \varphi + (1 - \cos \varphi) (\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{n} + (\vec{n} \times \vec{x}) \sin \varphi$ )

a tedy každé otočení lze zapsat jako  $e^{\varphi \vec{n} \cdot \vec{L}}$  pro vhodný  $\vec{n}$  a  $\varphi$

a  $SO(3)$  je pokryta exponenciálním zobrazením.

2)  $SU(2)$  - grupa (nyní komplexních) unitárních matic  $2 \times 2$  splňujících  $A^\dagger A = AA^\dagger = 1$  s  $\det A = 1$

- nejobecnější prvek této grupy má tvar

$$A = \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix} = 1 x_0 + i(\vec{x} \cdot \vec{\sigma}) = \begin{pmatrix} x_0 + i x_3 & x_2 + i x_1 \\ -x_2 + i x_1 & x_0 - i x_3 \end{pmatrix}$$

kde  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  jsou Pauliho matice

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

s podmínkou  $\det A = |a|^2 + |b|^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

jde tedy o 3-parametrickou reálnou Lieovu grupu

- jde o podgrupu  $GL(2, \mathbb{C})$  a její Lieova algebra bude  
podalgebrou LA všech ko-plexních matic  $n \times n$

- vezmeme-li  $A = e^{tC} = 1 + tC + \dots$ , dostaneme

nové podmínky  $C^\dagger + C = 0$  a  $\text{Tr} C = 0 \leftarrow \det A = \det e^{tC} = e^{t \text{Tr} C} = 1$

a  $su(2)$  je tedy tvořena antihermitovskými ( $C = -C^\dagger$ ) maticemi s nulovou stopou, což platí obecně pro  $SU(n)$ , pro  $U(n)$  odpadá podmínka na nulovou stopu

- přestože jde o ko-plexní matice, uvažujeme je jako prvky reálné LG a odpovídající reálné Lieovy algebry, tj. uvažujeme pouze reálné lineární kombinace těchto antihermit. matic,

takže pro  $U(n)$  bude  $2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n = n^2$  nezávislých prvků LA  $u(n)$   
 reálná a imaginární část jsou nezávislé  $\leftarrow$  počet prvků nad diagonálou  $\downarrow$  nad diagonálou musí být reálné imaginární čísla

a tedy  $U(n)$  je  $n^2$ -rozměrná

pro  $SU(n)$  máme navíc podmínku  $\text{Tr} C = 0$ , takže máme o jednu nezávislou matici méně  $\Rightarrow \dim su(n) = n^2 - 1 = \dim SU(n)$

a tedy  $\dim SU(3) = 8$

- jako bázi  $su(2)$  lze volit  $L_i = -\frac{i}{2} \sigma_i$  skomutátorem  $[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k$   
 neboť  $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k$

a obecný prvek je

$$C = \vec{\varphi} \cdot \vec{L} = -\frac{i}{2} \vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \varphi_3 & -\frac{i}{2} \varphi_1 - \frac{1}{2} \varphi_2 \\ \frac{i}{2} \varphi_1 - \frac{1}{2} \varphi_2 & \frac{i}{2} \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix}$$

což je obecná antiherm. matice s nulovou stopou

- jako jednoparametrické podgroupy

dostaneme (opět bereme  $\varphi$  jako parametr  $t$ )

$$e^C = e^{-\frac{i}{2} \vec{\varphi} \cdot \vec{\sigma}} = \cos \frac{\varphi}{2} - i (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} + i n_3 \sin \frac{\varphi}{2} & -i(n_1 - i n_2) \sin \frac{\varphi}{2} \\ i(n_1 + i n_2) \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} - i n_3 \sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

pokud zvolíme  $x_0 = \cos \varphi/2$ ,  $x_i = -n_i \sin \varphi/2$

čímž bude splněna podmínka  $\det e^C = 1 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

a tedy i  $SU(2)$  je pokryta exponenciálním zobrazením.

neboť díky

$$\sigma_i \sigma_j = i \sum \epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} \mathbb{1}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} (\sum_i n_i \sigma_i) (\sum_j n_j \sigma_j) &= \sum_{i,j} n_i n_j (i \epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} \mathbb{1}) = \\ &= \sum_{i,j} n_i n_j \delta_{ij} \mathbb{1} = \sum_i n_i^2 \mathbb{1} = \mathbb{1} \end{aligned}$$