Levoinvariantní vektorová pole grupy $SL(2,\mathbb{R})$

- protože jde o grupu matic 2×2 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ s podmínkou $\det A = ad-bc=1$, jde o 3-parametrickou (3-rozměrnou) Lieovu grupu a musíme se tedy omezit a tři nezávislé parametry, řekněme a, b, c, přičemž $d=\frac{1+b\cdot c}{a}$ (alespoň tam, kde je $a\neq 0$)
- hledáme tedy levoinvariantní vekt. pole ve tvaru (tj. ve zvolených souřadnicích)

$$V \overset{(a,b,c)}{=} V^a(a,b,c)\frac{\partial}{\partial a}+V^b(a,b,c)\frac{\partial}{\partial b}+V^c(a,b,c)\frac{\partial}{\partial c}$$

pomocí standardního postupu, kdy vyjádříme v těchto souřadnicích levé posunutí $h=g_0 g$ a provedeme push-forward vektoru v identitě do bodu g_0.

- grupová operace $h=g_0 g$ je v souřadnicích

$$\begin{pmatrix} a_h & b_h \\ c_h & \frac{1+b_h c_h}{a_h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & \frac{1+b_0 c_0}{a_0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_g & b_g \\ c_g & \frac{1+b_g c_g}{a_g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{a_0 a_g + b_0 c_g}^{a_h} & \overbrace{a_0 b_g + b_0 \frac{1+b_g c_g}{a_g}}^{b_h} \\ \underbrace{c_0 a_g + \frac{1+b_0 c_0}{a_0} c_g}_{c_h} & \underbrace{\dots}_{\text{totojiž nepotřebujeme}} \end{pmatrix}$$

Jacobián tedy bude matice 3×3
(pro levé posunutí pomocí g_0)

$$J = \frac{\partial(a_h,b_h,c_h)}{\partial(a_g,b_g,c_g)} = \begin{array}{c} \\ a_h \\ b_h \\ c_h \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_g & b_g & c_g \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_0 & 0 & b_0 \\ -b_0\frac{1+b_g c_g}{a_g^2} & a_0 + b_0\frac{c_g}{a_g} & b_0 \frac{b_g}{a_g} \\ c_0 & 0 & \frac{1+b_0 c_0}{a_0} \end{pmatrix} \end{array} = J(a_g,b_g,c_g)$$

- použijeme obecný výraz pro push-forward z g do h pomocí g_0

tj. souřadnicově $V^\mu(h) = J^\mu{}_\nu(g)V^\nu(g)$

pro $g=e$ a $V(e) = s^a\frac{\partial}{\partial a}+s^b\frac{\partial}{\partial b}+s^c\frac{\partial}{\partial c}$, kde s^a, s^b, s^c jsou lib. reálná čísla určující vektor v e

nyní

neboť pro $g=e$ $h=g_0$ $\rightarrow$ $V^\mu(a_0,b_0,c_0) = J^\mu{}_\nu(\underset{1}{a_e},\underset{0}{b_e},\underset{0}{c_e})\underbrace{V^\nu(e)}_{s^\nu}$

kde $J(e) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 & 0 \\ c_0 & 0 & \frac{1+b_0 c_0}{a_0} \end{pmatrix}$ a tedy

$$V^a(a_0,b_0,c_0) = s^a a_0 + s^c b_0$$
$$V^b(a_0,b_0,c_0) = -s^a b_0 + s^b a_0$$
$$V^c(a_0,b_0,c_0) = s^a c_0 + s^c\frac{1+b_0 c_0}{a_0}$$

- dostáváme tak tři nezávislá levoinvariantní vektorová pole (nyní již zapsané pomocí a, b, c)

pro $(s^a, s^b, s^c) = (1,0,0)$: $V_1 = a\frac{\partial}{\partial a} - b\frac{\partial}{\partial b} + c\frac{\partial}{\partial c}$

pro $(s^a, s^b, s^c) = (0,1,0)$: $V_2 = a\frac{\partial}{\partial b}$

a pro $(s^a, s^b, s^c) = (0,0,1)$: $V_3 = b\frac{\partial}{\partial a} + \frac{1+bc}{a}\frac{\partial}{\partial c}$

- komutační relace

$$[V_1, V_2] = \left(a\frac{\partial}{\partial a} - \cancel{b\frac{\partial}{\partial b}} + \cancel{c\frac{\partial}{\partial c}}\right) a\frac{\partial}{\partial b} - a\frac{\partial}{\partial b}\left(\cancel{a\frac{\partial}{\partial a}} - b\frac{\partial}{\partial b} + \cancel{c\frac{\partial}{\partial c}}\right) =$$

$\neq 0$ $\neq 0$

← druhé derivace se vykrátí, přispívají jen členy typu $a\frac{\partial}{\partial a} a\frac{\partial}{\partial b} \to a\frac{\partial}{\partial b}$ apod.

$$= a\frac{\partial}{\partial b} + a\frac{\partial}{\partial b} = 2V_2$$

$$[V_1, V_3] = \left(a\frac{\partial}{\partial a} - b\frac{\partial}{\partial b} + c\frac{\partial}{\partial c}\right)\left(b\frac{\partial}{\partial a} + \frac{1+bc}{a}\frac{\partial}{\partial c}\right) - \left(b\frac{\partial}{\partial a} + \frac{1+bc}{a}\frac{\partial}{\partial c}\right) \times$$

$$\times \left(a\frac{\partial}{\partial a} - b\frac{\partial}{\partial b} + c\frac{\partial}{\partial c}\right) =$$

$$= -b\frac{\partial}{\partial a} - a\frac{1+bc}{a^2}\frac{\partial}{\partial c} - \cancel{b\frac{c}{a}\frac{\partial}{\partial c}} + \cancel{c\frac{b}{a}\frac{\partial}{\partial c}} - b\frac{\partial}{\partial a} - \frac{1+bc}{a}\frac{\partial}{\partial c} =$$

$$= -2\left(b\frac{\partial}{\partial a} + \frac{1+bc}{a}\frac{\partial}{\partial c}\right) = -2V_3$$

$$[V_2, V_3] = a\frac{\partial}{\partial a} + a\frac{c}{a}\frac{\partial}{\partial c} - b\frac{\partial}{\partial b} = V_1$$

- toto jsou stejné komutační relace jako pro bázi maticové Lieovy algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, kterou vezmeme ve tvaru $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ← tři nezávislé bezestopé matice

které dávají obecný prvek $C = rL_1 + sL_2 + tL_3 = \begin{pmatrix} r & s \\ t & -r \end{pmatrix}$,

zde dostaneme

$$[L_1, L_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2L_2$$

$$[L_1, L_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2L_3$$

$$[L_2, L_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = L_1$$

a tedy máme izomorfismus, když přiřadíme

$$V_i \leftrightarrow L_i$$

- vztah k Lieově algebře $GL(2,\mathbb{R})$

- ukázali jsme si, že levoinvariantní vektorová pole $GL(n,\mathbb{R})$ jsou (v souřadnicích $x^i{}_j = a_{ij}$ = prvky matice $n\times n$)

$$V_C = x^i{}_\ell C^\ell_j \frac{\partial}{\partial x^i_j}$$, kde C je libovolná reálná matice $n\times n$

která je izomorfní LA matic C, neboť $[V_C, V_D] = V_{\underset{CD-DC}{[C,D]}}$

- tato algebra je obecně n^2-rozměrná a pro $GL(2,\mathbb{R})$ 4-rozměrná

- $SL(2,\mathbb{R})$ tvoří její 3-rozměrnou podgrupu $GL(2,\mathbb{R})$ s podmínkou $\det A = 1$, což vede na podmínku pro matice C z LA ve tvaru $\mathrm{Tr}\, C = 0$

- pokud vyjdeme ze vzorce pro V_C, ale použijeme bezestopou matici $C_0 = \begin{pmatrix} r & s \\ t & -r \end{pmatrix}$, dostaneme

$$V_{C_0} = x^1{}_1 r \frac{\partial}{\partial x^1_1} + x^1{}_1 s \frac{\partial}{\partial x^1{}_2} + x^1{}_2 t \frac{\partial}{\partial x^1_1} + x^1_2(-r)\frac{\partial}{\partial x^1_2} +$$
$$+ x^2_1 r \frac{\partial}{\partial x^2_1} + x^2{}_1 s \frac{\partial}{\partial x^2_2} + x^2{}_2 t \frac{\partial}{\partial x^2{}_1} + x^2_2(-r)\frac{\partial}{\partial x^2_2} =$$
$$= r\Big(\overbrace{x^1_1 \frac{\partial}{\partial x^1_1} - x^1{}_2 \frac{\partial}{\partial x^1_2} + x^2_1 \frac{\partial}{\partial x^2_1} - x^2_2 \frac{\partial}{\partial x^2_2}}^{W_1}\Big) +$$
$$+ s\Big(\underbrace{x^1{}_1 \frac{\partial}{\partial x^1_2} + x^2{}_1 \frac{\partial}{\partial x^2_2}}_{W_2}\Big) + t\Big(\underbrace{x^1{}_2 \frac{\partial}{\partial x^1_1} + x^2{}_2 \frac{\partial}{\partial x^2_1}}_{W_3}\Big)$$

- levoinvariantní vektorová pole W_1, W_2 a W_3 tvoří bázi 3-rozměrné Lieovy podalgebry LA $gl(2,\mathbb{R})$

- snadno si ověříte, že jde o Lieovu algebru izomorfní s $sl(2,\mathbb{R})$, neboť opět $[W_1, W_2] = 2W_2$ $[W_2, W_3] = W_1$
$[W_1, W_3] = -2W_3$

a díky tomu, že jsme použili „vhodné souřadnice" $x^i{}_j$, tak můžeme snadno redukovat W_1, W_2 a W_3 na podvarietu danou $SL(2,\mathbb{R})$ se souřadnicemi $x^1{}_1 = a$, $x^1{}_2 = b$ a $x^2{}_1 = c$, přičemž položíme $x^2_2 = d = \frac{1+bc}{a}$, stačí totiž vynechat členy s $\frac{\partial}{\partial x^2_2}$ a dostaneme V_1, V_2 a V_3