Matematické struktury za Lieovými grupami

M1

- aneb od topologického prostoru k diferencovatelným varietám a vektorovým polím na nich

Def: <u>Topologický prostor</u> je množina X s kolekcí τ podmnožin X (nazývané topologie τ na X) splňující následující axiomy:

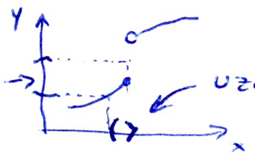
1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$, tj. prázdná množina a X patří vždy do určité topologie na X
2) sjednocení libovolného počtu množin z τ leží v τ
3) průnik konečného počtu množin z τ leží v τ

- množiny z τ se nazývají <u>otevřené množiny</u>, jejich doplňky v X jsou uzavřené
  - např. $\emptyset$ a X jsou obojí!
  - příkladem přirozené topologie na $\mathbb{R}^n$ je kolekce všech otevřených množin (intervalů a jejich součinů) a jejich libovolných sjednocení $\Rightarrow$ vždy znovu otevřené množiny

Def: <u>Spojitost</u>: Zobrazení $\phi : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ nazveme spojité, pokud <u>vzor</u> každé otevřené množiny v X_2 je otevřená množina v X_1

protipříklad:

otevřená množina v X_2



uzavřená množina v X_1

<u>Okolí</u>: Okolí bodu $x \in (X, \tau)$ je podmnožina X, jejíž otevřená podmnožina obsahuje x, tj. $U(x)$ je okolím x, pokud $\exists\, \sigma \in \tau : x \in \sigma$ a $\sigma \subset U(x)$

<u>Spojitost v bodě</u>: zobrazení ϕ je spojité v $x \in (X_1, \tau_1)$, pokud pro každé okolí U_2 obrazu $\phi(x)$ v X_2 existuje $U_1(x) \subset X_1$ takové, že $\phi(U_1(x)) \subset U_2(\phi(x))$.

$\Rightarrow$ ekvivalentní def. spojitosti: ϕ je spojité, pokud je spojité v každém bodě $x \in X_1$.

<u>Vnitřek množiny</u> = největší otevřená podmnožina dané množiny

<u>Uzávěr množiny</u> = nejmenší uzavřená množina v X obsahující danou množinu

Homeomorfismus: zobrazení $\phi : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$, které je prosté, spojité a jehož inverzní zobrazení ϕ^{-1} je též spojité.

- pokud mezi (X_1, τ_1) a (X_2, τ_2) existuje homeomorfismus, pak jsou tyto topologické prostory homeomorfní
  $\Rightarrow$ třídy ekvivalence topologických prostorů
- pozn. homeomorfismus se používá v topologii pro „prostory mající podobný tvar"
  homomorfismus se používá v algebře pro podobné struktury v algebraickém smyslu

Pokrytí množiny: Řekneme, že $M \subset X$ je pokrytá systémem množin $D \subset X$, pokud $M \subset \bigcup_{Y \in D} Y$

- jsou-li D otevřené množiny, pak jde o otevřené pokrytí
- je-li D_0 část D a stále pokrývá M, pak D_0 nazýváme podpokrytím M

Kompaktnost: Podmnožina $M \subset X$ je kompaktní, pokud z každého jejího pokrytí otevřenými množinami D lze vybrat konečné podpokrytí $D_0 \subset D$, tj. D_0 obsahuje konečný počet otevřených množin

- v euklidovských prostorech se standardní topologií jde o omezené a uzavřené množiny
- je-li $M = X$, pak se celý topologický prostor nazývá kompaktní
- např. otevřený interval $(0,1)$ jako topologický prostor se standardní topologií otevřených podintervalů není kompaktní, i když je omezený (lze spojitě namapovat na celé $\mathbb{R}$)
- ovšem $SO(2)$ (= kružnice) či $SO(3)$ jsou kompaktní
- spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní

Lokální kompaktnost: Topologický prostor je lokálně kompaktní, pokud má jeho každý bod kompaktní okolí.

Souvislost: Množina $S \subset (X,\tau)$ je souvislá, pokud neexistují neprázdné otevřené množiny A a B z τ takové, že

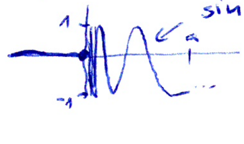
$$S = A \cup B \quad \text{a} \quad A \cap B = \emptyset$$ = prázdný průnik

tj. S není tvořena dvěmi oddělenými otevřenými množinami

- topologický prostor je souvislý, je-li svou vlastní souvislou podmnožinou
  - např. $SO(3)$ je souvislý (všechny vlastní rotace, $\det R = 1$)
    ale $O(3)$ není souvislý (2 oddělené části (komponenty)
    - vlastní rotace s $\det R = 1$ a nevlastní rotace s $\det S = -1$)
    - obě části jsou zároveň otevřené i uzavřené podmnožiny
- komponenta souvislosti množiny $S \subset X$ je každá její maximální souvislá podmnožina.
- topologický prostor X je lokálně souvislý v bodě x, pokud pro každou otevřenou množinu $V: x \in V$ existuje souvislá otevřená množina $U: x \in U \subset V$
  - celý prostor je lokálně souvislý, pokud je lokálně souvislý v každém bodě

Oblouková souvislost:

- oblouk mezi body x a $y \in X$ je spojité zobrazení $\gamma : [0,1] \to (X,\tau)$ takové, že $\gamma(0) = x$ a $\gamma(1) = y$
- obloukově souvislý prostor je topologický prostor, jehož každé dva body lze spojit obloukem
  - pozor, oblouková souvislost implikuje souvislost, ale ne obráceně, viz topologova sinusová křivka
    je souvislá ale ne obloukově →



$\sin\frac{1}{x}$ na $x \in (0,a]$

Jednoduchá souvislost (nesmí být „díry")

- topologický prostor je jednoduše souvislý, pokud je obloukově souvislý a každý oblouk mezi dvěma body lze převést na libovolný jiný oblouk mezi těmito body, neboli každý uzavřený oblouk ($\gamma : S^1 \to X$) může být smrsknut do bodu, tj. $\exists$ spojité zobrazení $\phi : D^2$ (jednotkový disk v E^2) $\to X$ takové, že $\phi \downarrow S^1 = \gamma$ (restrikce ϕ na S^1 dává γ)

Def: <u>Topologická varieta dimenze n</u> je topologický prostor, který je Hausdorffův, má spočetnou bázi a je lokálně homeomorfní s Euklidovským prostorem $\mathbb{R}^n$, tj. ke každému x existuje okolí homeomorfní s otevřenou množinou v $\mathbb{R}^n$ se standardní topologií.

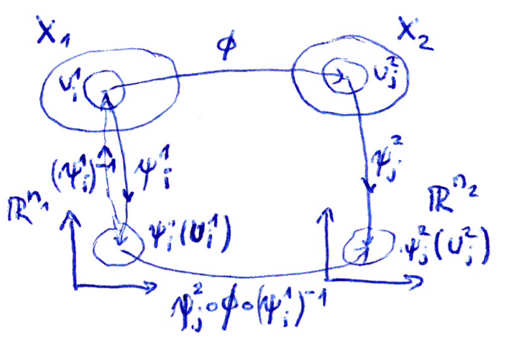
- <u>Hausdorffův prostor</u> je topologický prostor (X,τ), pokud pro $\forall x,y \in X$ $\exists$ okolí $U(x)$ a $V(y)$, pro které platí $U(x) \cap V(y) = \emptyset$, neboli body jsou „dostatečně oddělené otevřenými množinami"
- báze B topologického prostoru X je kolekce otevřených množin takových, že každá otevřená množina v X lze zapsat jako sjednocení množin z B
  - např. $\mathbb{R}$ má spočetnou bázi otevřených intervalů s velikostmi a středy danými racionálními čísly $\Rightarrow$ i $\mathbb{R}^n$ má spočetnou bázi (koule s racionálními středy a poloměry)
- homeomorfismus otevřeného okolí $x \in X$ do $\mathbb{R}^n$ se nazývá <u>mapa</u> a jejich kolekce <u>atlas</u>, pokud tato okolí pokrývají celý prostor X

Def: <u>Diferencovatelná varieta třídy C^k dimenze n</u> je topologická varieta X dimenze n, pro kterou mají tzv. přechodové funkce (mapy) $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ na $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ spojité derivace až do řádu k, kde (U_i, φ_i) jsou mapy na X.

<u>Hladká varieta</u> je diferencovatelná varieta třídy C^∞

<u>Analytická varieta</u> je hladká varieta, kde navíc $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ jsou analytická zobrazení (tj. Taylorův rozvoj je absolutně konvergentní na určitém otevřeném okolí)

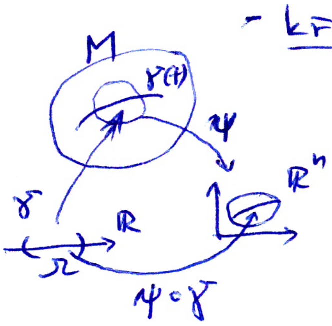
- zobrazení $\phi : X_1 \to X_2$ mezi dvěmi hladkými varietami je hladké, pokud je spojité (topologicky) a zobrazení $\varphi_j^2 \circ \phi \circ (\varphi_i^1)^{-1}$ je pro všechny mapy (U_i^1, φ_i^1) na X_1 a (U_j^2, φ_j^2) na X_2 hladké zobrazení z $\mathbb{R}^{n_1}$ do $\mathbb{R}^{n_2}$.



Difeomorfismus mezi dvěmi hladkými varietami je hladký homeomorfismus, kde tedy obě zobrazení ϕ a ϕ^{-1} jsou bijektivní a hladká.

Tečný prostor hladké variety M v bodě p $= T_pM$

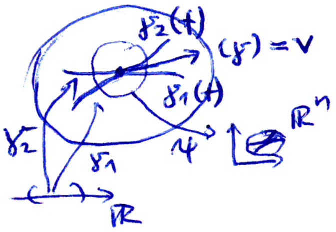
- lze zavést buď přes tečné vektory ke křivkám nebo ekvivalentně přes diferenciální operátory na funkcích na varietě (směrové derivace)



- **křivka $\gamma(t)$** na hladké varietě M je hladké zobrazení $\gamma : \Omega \to M$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval
- souřadnicově píšeme (pro $\dim M = n$)

$$\psi(\underbrace{\gamma(t)}_{\text{bod v } M}) = (\underbrace{x^1(\gamma(t)), \dots, x^n(\gamma(t))}_{\text{bod v } \mathbb{R}^n}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zjednodušení notace}}}{=} (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

- **dvě křivky jsou tečné** v bodě $p \in M$,



pokud
1) $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$
2) v souřadnicové mapě ψ na okolí $U(p)$ platí

$$\left.\frac{dx^\mu(\gamma_1(t))}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{dx^\mu(\gamma_2(t))}{dt}\right|_{t=0} \quad \text{pro } \forall\, \mu = 1, \dots, n$$

neboli kompaktně můžeme psát

$$\dot\gamma_1(0) = \dot\gamma_2(0), \text{ kde } \dot\gamma(t) = (\dot x^1(t), \dots, \dot x^n(t))$$

- **tečný vektor v v bodě $p \in M$** se zavádí jako třída ekvivalence křivek (γ) vzájemně tečných v p, a tedy $v = \dot\gamma(0)$ určíme pro libovolnou křivku z (γ)
- všechny takto zavedené tečné vektory v bodě p tvoří vektorový prostor, v němž definujeme $(\gamma) = \alpha(\gamma_1) + \beta(\gamma_2)$ jako tečný vektor ke třídě křivek ekvivalentních s křivkou $\gamma(t)$ danou pomocí lokální mapy ϕ na $U(p)$ splňující $\phi(p) = (0, 0, \dots 0)$ jako

$$\gamma(t) = \phi^{-1}\left[\alpha\, \underbrace{\phi \circ \gamma_1(t)} + \beta\, \underbrace{\phi \circ \gamma_2(t)}\right]$$

křivky v $\mathbb{R}^n$ jdoucí $\phi(p)$, kde máme definováno $+$ a násobení reálným číslem

takže $\gamma(0) = p$

a také $\displaystyle \frac{dx^\mu(\gamma(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \alpha \frac{dx^\mu(\gamma_1(t))}{dt}\Big|_{t=0} + \beta \frac{dx^\mu(\gamma_2(t))}{dt}\Big|_{t=0}$

- <u>tečný prostor T_pM</u> v bodě p variety M je tedy vektorový prostor takto definovaných tečných vektorů v bodě p

- <u>diferencovatelná funkce $f: M \to \mathbb{R}$</u> na okolí $U(p) \subset M$ s lokální mapou ϕ je taková funkce, pro níž $f \circ \phi^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná (do určitého řádu)

- <u>směrová derivace f podél tečného vektoru $v = (\gamma) \in T_pM$</u> v bodě $p \in M$ je definována pomocí

neboli jde o změnu funkce f podél křivky $\gamma(t)$ s tečným vektorem v $\longrightarrow$

$$v(f) = \frac{df(\gamma(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(\gamma(t+\Delta t)) - f(\gamma(t))}{\Delta t}$$

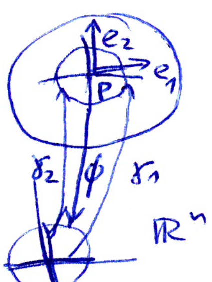
a souřadnicově můžeme psát

$$v(f) = \frac{d\, f\circ\phi^{-1}(x^1(t), \dots, x^n(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{dx^\mu(t)}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\partial f\circ\phi^{-1}}{\partial x^\mu} =$$

$$\equiv \sum_{\mu=1}^{n} v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f)$$

v^μ – složka tečného vektoru ve směru x^μ

neboli jsme dostali vyjádření v pomocí diferenciálního operátoru prvního řádu $\displaystyle\sum_{\mu=1}^{n} v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$



- na tečném prostoru T_pM lze zavést bázi $e_\mu = \dot{\gamma}_\mu(0)$, kde $\gamma_\mu(t)$ jsou tzv. souřadnicové křivky $\gamma_\mu(t) = (x^1(p), \dots, x^\mu(p) + t, \dots, x^n(p))$, neboť pak

$$e_\mu = \dot{\gamma}_\mu(0) = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \mu\text{-tá pozice}}}{1}, 0, \dots, 0) \quad \text{a} \quad v = \sum_{\mu=1}^{n} v^\mu e_\mu$$

- tuto bázi lze tedy identifikovat s $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, neboť

$$e_\mu(f) = \frac{df(\gamma_\mu(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f\circ\phi^{-1}}{\partial x^\alpha} \underbrace{\frac{dx^\alpha(\gamma_\mu(t))}{dt}\Big|_{t=0}}_{\delta^\alpha_\mu} = \frac{\partial(f)}{\partial x^\mu}$$

- máme tedy vzájemně jednoznačné zobrazení (izomorfismus) mezi tečným prostorem T_pM a vektorovým prostorem diferenciálních operátorů prvního řádu D_pM
- dimenze obou jsou rovny $\dim M = n$

Vektorové pole V na varietě M

- přiřadíme-li každému bodu $p \in M$ jeden tečný vektor z T_pM dostaneme <u>vektorové pole V na M</u> a jde tedy o zobrazení

$$V : M \to TM = \bigcup_{p\in M} T_pM \quad = \text{tečný bandl variety } M$$

- protože tečné vektory lze interpretovat jako diferenciální operátory na funkcích na varietě (viz výše), tak vektorové pole působením na funkci f na M dá novou funkci Vf:

$$Vf : M \to \mathbb{R}\ , \qquad \underbrace{Vf}_{\text{operátor nová funkce}}(\underset{\text{bod}}{p}) = \underset{\text{tečný vektor v } p \text{ tj. } V_p \in T_pM}{V_p}(f) \in \mathbb{R}$$

- <u>hladké vektorové pole</u> je vektorové pole na M, které z hladkých funkcí dělá opět hladké funkce,
  tj. $(Vf)\circ\phi^{-1}$ je hladká funkce, kde ϕ je lokální mapa na $U(p)$

- všechna hladká vektorová pole na M tvoří ∞-rozměrný vektorový prostor
  (koeficienty kombinující dvě vekt. pole jsou funkce na M)

- souřadnicově při lokální mapě ϕ na okolí $U(p)$ se vektorové pole zapíše pomocí báze $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ jako

$$V = \sum_{\mu=1}^{n} \underbrace{V^\mu(x)}_{\text{složky pole – pro hladké pole jde o hladké funkce}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \qquad \text{a tedy } (Vf)(x) = \sum_{\mu=1}^{n} V^\mu(x) \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$$

jde o obvyklý zkrácený zápis vynechávající ϕ, přesněji bychom místo f psali $f\circ\phi^{-1}$

- při změně souřadnic $x \to x' = x'(x)$ se složky vektorového pole transformují pomocí

$$V'^\mu(x'(x)) = J^\mu{}_\nu(x)\, V^\nu(x) \quad , \text{kde } J^\mu{}_\nu(x) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$$

je Jacobián

- <u>integrální křivky</u> vektorového pole V na M (hladkého)
  - integrální křivka V jdoucí bodem $p \in M$ je křivka

    $\gamma_V : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, splňující $\gamma_V(0) = p$

    a která má pro každé $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tečný vektor daný

    $V_{\gamma_V(t)}$ = tečný vektor pole V v bodě $\gamma_V(t)$, tj. platí

    symbolicky $\dot{\gamma}_V(t) = V_{\gamma_V(t)}$ a souřadnicově v jisté lokální mapě

$$\frac{d\, x^\mu(\gamma_V(t))}{dt} = V^\mu(\gamma_V(t))$$

neboli integrální křivka je dána diferenciálními rovnicemi

$$\frac{dx^1(t)}{dt} = V^1(x^1(t), \dots x^n(t))$$

$$\vdots$$

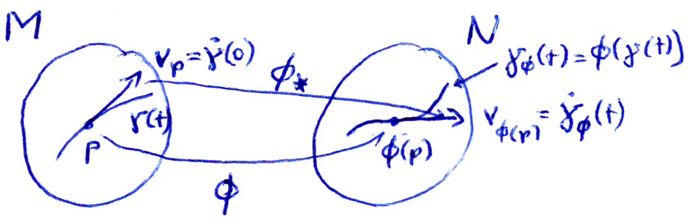
$$\frac{dx^n(t)}{dt} = V^n(x^1(t), \dots, x^n(t))$$

s počáteční podmínkou $x^\mu(0) = x^\mu(p)$

- říkáme, že vektorové pole je kompletní (úplné), pokud každá integrální křivka tohoto pole jdoucí libovolným bodem $p \in M$ může být rozšířena pro $\forall t \in \mathbb{R}$
  - pro kompaktní variety M je každé hladké vektorové pole úplné
  - integrální křivky úplného vekt. pole V pokrývají celou M (tvoří kongruenci ∞-mnoha neprotínajících se křivek až na singulární body, kde $V = 0$)

- <u>push-forward vektorového pole</u> (též <u>tečné zobrazení</u>)
  - jde o zobrazení z tečného prostoru T_pM variety M v bodě p do tečného prostoru $T_{\phi(p)}N$ variety N v bodě $\phi(p)$, který je daný jistým zobrazením $\phi : M \to N$
  - značí se $\phi_* : T_pM \to T_{\phi(p)}N$ a je dáno vztahem

$$\phi_*(\dot{\gamma}(0)) = \dot{\gamma}_\phi(0)$$



kde $\dot{\gamma}_\phi(0)$ je tečný vektor z $T_{\phi(p)}N$ ke křivce $\gamma_\phi(t) = \phi(\gamma(t))$ splňující $\gamma_\phi(0) = \phi(p)$, pokud $\gamma(t)$ je křivka v M a $\gamma(0) = p$

- push-forward souřadnicově
  - nechť máme lokální mapy v okolí $U(p) \in M$ se souřadnicemi x^μ a v okolí $U(\phi(p)) \in N$ se souřadnicemi y^ν, pak zobrazení ϕ je dáno $y^\nu = y^\nu(x)$

    a vektorová pole můžeme psát v souřadnicích jako $V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ a $\phi_* V = W^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu}$ (zde a níže používám Einsteinovu sumaci)
  - zapůsobíme-li vektorovým polem $\phi_* V$ na funkci f na N dostaneme

$$(\phi_* V) f = \frac{d f(\overbrace{\phi(\gamma(t))}^{\text{body v } N \text{ se souřadnicemi } y^\nu})}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y^\nu} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \underbrace{\frac{d x^\mu(\gamma(t))}{dt}}_{V^\mu} =$$

$$= V^\mu \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial y^\nu} = W^\nu \frac{\partial f}{\partial y^\nu}$$

neboli $W^\nu = J^\nu{}_\mu V^\mu$ kde $J^\nu{}_\mu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}$ je Jacobián zobrazení ϕ v souřadnicích $y^\nu(x)$ (podobně jako u změny souřadnic)

Lieova závorka (komutátor) dvou polí V a W na M

- jde o vektorové pole značené $[V,W]$, které je v bodě $p \in M$ dáno pomocí $[V,W]_p(f) = V_p(\underbrace{Wf}) - W_p(\underbrace{Vf}_{\text{funkce na } M})$
  - souřadnicově se druhé derivace odečtou a lze tak ukázat, že jde opět o tečný vektor z T_pM a $[V,W]$ je tedy vektorové pole na M
  - složky jsou dány (v lokálních souřadnicích x^μ)

$$[V,W]^\mu(x) = V^\nu \frac{\partial W^\mu}{\partial x^\nu} - W^\nu \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu}$$

- lze ukázat, že je-li ϕ difeomorfismus (hladké a bijektivní zobrazení) mezi varietami M a N, pak push-forward přenáší Lieovu závorku na M na Lieovu závorku na N

  tj. $\phi_*[V,W] = [\phi_* V, \phi_* W]$

- je antisymetrická $[V,W] = -[W,V]$ ← přímo z definice
  a splňuje Jacobiho identitu $[V,[W,Z]] + [W,[Z,V]] + [Z,[V,W]] = 0$

  a tedy vektorový prostor vektorových polí s Lieovou závorkou tvoří ∞-rozm. Lieovu algebru