

Licová grupa a její licová algebra geometricky

LG 1

Def: Topologická grupa G je topologický prostor, který je zároveň grupou a navíc zobrazení

$$\phi: G \times G \rightarrow G \quad \text{tj. } \phi: (a, b) \mapsto a \cdot b \quad \text{odpovídající grupové}$$

$$i: G \rightarrow G \quad \text{tj. } i: a \mapsto a^{-1} \quad \text{operaci a inverzi}$$

jsou spojitá v topologickém smyslu.

Def: Reálná Licová grupa G je topologická grupa, která je zároveň reálnou hladkou varietou a zobrazení ϕ a i jsou navíc hladká zobrazení (či analytická zobrazení)

- historická poznámka: pátý Hilbertův problém z roku 1900

se týkal toho, zda je nutné požadovat hladkost, zda nestačí pouze to, aby šlo o topologickou grupu a topologickou varietu, tj. zda nestačí spojitost, ukázalo se, že ~~na~~ ^{na} ~~poněkud~~ ^{na} obecných podmínkách ano a tedy spojitost ϕ a i plus algebraická struktura grupy již implikují hladkost (analyticitu)

Příklad: grupa transformací Euklidovské roviny, které zachovávají vzdálenosti a orientaci = speciální Euklidovská grupa $E^+(2)$

= grupa přemístění objektu v rovině

- je dána transformacemi

$$\tilde{x}_1 = x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha + a_1$$

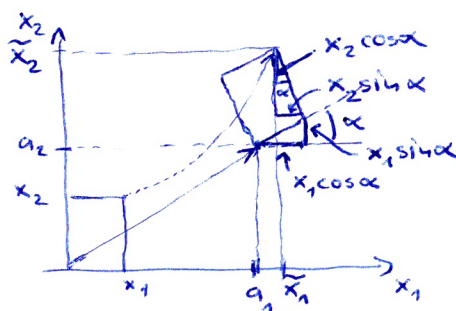
$$\tilde{x}_2 = x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha + a_2$$

neboli

$$\tilde{x} = R(\alpha) x + a$$

↑
vlastní rotace
o úhel α

↑
posunutí
o vektor a



- složením dvou těchto transformací dostaneme opět podobnou transformaci

$$\tilde{\tilde{x}} = R(\beta) \tilde{x} + b = \underbrace{R(\beta)R(\alpha)}_{\text{rotace o úhel } \gamma = \alpha + \beta} x + \underbrace{R(\beta)a + b}_{\text{posunutí o vektor } c = R(\beta)a + b} = R(\gamma)x + c$$

- jde o 3-rozměrnou (3-parametrickou) Lieovu grupu, kde každý prvek je charakterizován trojicí hodnot (α, a_1, a_2) a kde grupová operace $\phi: G \times G \rightarrow G$

je dána vztahy $\phi(B(\beta, b_1, b_2), A(\alpha, a_1, a_2)) = C(\gamma, c_1, c_2)$

kde $\gamma = \alpha + \beta$ $c_1 = a_1 \cos \beta - a_2 \sin \beta + b_1$
 $c_2 = a_1 \sin \beta + a_2 \cos \beta + b_2$

neboli $C = R(\beta)A + B$

což jsou hladké (analytické) funkce, a inverzní operace

$i: G \rightarrow G$ neboli $i(A(\alpha, a_1, a_2)) = B(\beta, b_1, b_2)$

je dána pomocí $\beta = -\alpha$, $b = -R(-\alpha)a$

$b_1 = -a_1 \cos \alpha - a_2 \sin \alpha$

$b_2 = a_1 \sin \alpha - a_2 \cos \alpha$

jsou též hladké (analytické) funkce

neboť pak $\phi(B, A) = E \leftarrow$ identita

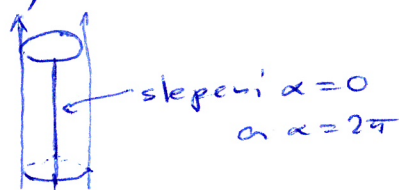
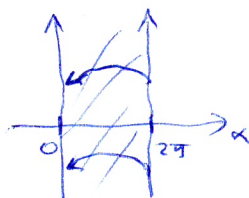
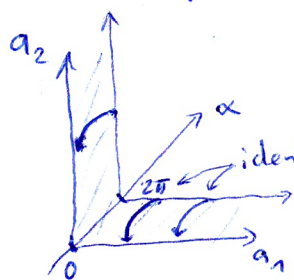
neboli $\tilde{x} = \underbrace{R(-\alpha)R(\alpha)}_{R(\beta)}x + \underbrace{R(-\alpha)a - R(-\alpha)a}_{R(\beta)a} = x$

- protože pro $\alpha = 0$ a $\alpha = 2\pi$ dostáváme totéž, nelze použít globálně jednu hladkou parametrizaci (mapu)

- topologicky jde o 3-rozměrnou hladkou varietu

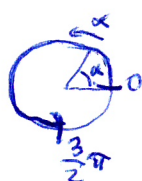
- váleček ve 4D zkonstruovaný z nekonečné vrstvy ve 3D a identifikací bodů krajních rovin

jako u 3D válece z roviny

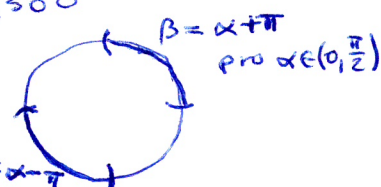


- stačí dvě mapy: vždy celé roviny (a_1, a_2) a

úhel např. $\alpha \in (0, \frac{3}{2}\pi)$ a $\beta \in (0, \frac{3}{2}\pi)$ ovšem měřeno od jiného úhlu



přechodové funkce jsou



pro $\alpha \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$

obě hladká zobrazení

- jde o souvislou Lieovu grupu,

ale ne o jednoduše souvislou (uzavřená křivka pro α od 0 do 2π nelze smršknout do bodu)

- jde o podgrupu plné Euklidovské grupy $E(2) = ISO(2)$, LG 3
 což je grupa všech izometrií roviny
 (kromě vlastních rotací a translací navíc nevlastní
 rotace (tedy i zrcadlení či inverze), ale také
 tzv. shluková symetrie = posun + zrcadlení)

$$\frac{O_2 \times O_2}{O_2}$$

kteřá má 2 ko-komponenty souvislosti $E^+(2)$ a $E^-(2)$

- je to také podgrupa obecnějších, afinních transformací
 roviny, které tvoří afinní grupu $GA(2, \mathbb{R})$
 $\tilde{x} = Ax + a$, kde A je libovolná invertovatelná
 (tj. $\det A \neq 0$) reálná matice 2×2

kterou lze přepsat maticově pomocí

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a tedy jde i o podgrupy $GL(3, \mathbb{R}) =$ matice $A_{3 \times 3}$,
 které jsou reálné a $\det A \neq 0$

neboť

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & a_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A_2 & a_2 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 A_2 & A_1 a_2 + a_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

↑
vektor

- přestože jako topologický prostor jde o direktní (kartézský)
 součin prostorů $\mathbb{R}^2$ a $SO(2)$, není grupa $E^+(2)$
 přírůžím součinem grup $T = (\mathbb{R}^2, +)$ = grupa pouze translací
 a $SO(2)$ = grupa rotací kolem
 počátku

protože prvky z těchto podgrup nekomutují

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & Ra \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ovšem T je normální podgrupou, takže jde o polopřímý
 součin $E^+(2) = T \rtimes SO(2)$

Levoinvariantní vektorová pole na Lieových grupách

- na Lieových grupách máme dva difeomorfismy -

- levé a pravé posunutí, kdy celou grupu G přeneseme

jedním prvkem $g \in G$ (vzpomeňte větu o přeuspořádání, která platí i pro spojitě grupy)

tj. $L_g: G \rightarrow G, L_g: h \rightarrow gh$

$R_g: G \rightarrow G, R_g: h \rightarrow hg$

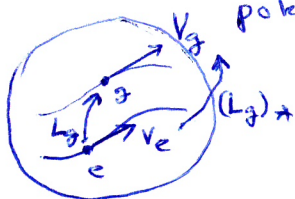
z definice jde o hladká zobrazení a jsou bijektivní a tedy difeomorfismy G na G

Def: Necht' G je Lieova grupa a L_g , resp. R_g značí

levé, resp. pravé posunutí na G , pak řekneme, že

vektorové pole V je levo-, resp. pravoinvariantní,

pokud platí $(L_g)_* V = V$, resp. $(R_g)_* V = V$ pro $\forall g \in G$



push-forward

souřadnicově musí platit pro L_g

složky V v okolí g

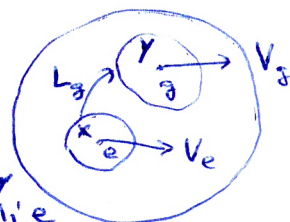
$$V^{\mu}(y(x)) = J^{\mu}_{\nu}(x) V^{\nu}(x)$$

dány levým posunutím L_g

Jacobiana změny souřadnic při L_g , tj.

$$J^{\mu}_{\nu}(x) = \frac{\partial y^{\mu}(x)}{\partial x^{\nu}}$$

složky V v okolí e



- levo- i pravoinvariantní pole jsou plně

určena tečnými vektory v identitě e (ale také libovolným

„roznesením“

$$V_g = (L_g)_* V_e$$

vektorem v jiném bodě)

a jsou hladká (neboť gh je hladké)

a tedy tvoří „pouze“ n -rozměrný vektorový prostor

izomorfni $T_e G$ a označíme ho $\mathcal{L}(G)$

- protože při difeomorfismech pro Lieovu zátvorku vekt. pole (pro levoinvariantní)

platí $\phi_*[V, W] = [\phi_* V, \phi_* W]$, kde $[V, W]_p(f) = V_p(Wf) - W_p(Vf)$

dostáváme pro levoinvariantní pole (těž pro pravoinvariantní)

$$(L_g)_*[V, W] = [(L_g)_* V, (L_g)_* W] = [V, W] \text{ pro } \forall V, W \in \mathcal{L}(G)$$

a tedy i $[V, W] \in \mathcal{L}(G)$ a $\mathcal{L}(G)$ tak tvoří Lieovu

algebru s komutátorem $[V, W]$

Def: Lieova algebra Lieovy grupy G je vektorový prostor $\mathcal{L}(G)$ všech levoinvariantních vektorových polí s komutátorem daným Lieovou závorkou dvou vektorových polí $[V, W] = V(Wf) - W(Vf)$.

- použití levoinvariantních vekt. polí je volba, stejně tak bychom mohli použít pravoinvariantní v. pole, která jsou obecně různá od levoinvariantních.
- někdy se LA Lieovy grupy G definuje jako tečný prostor v identitě $T_e G$, ovšem pak je třeba definovat komutátor na tomto prostoru, což lze obecně jen přes levoinvariantní pole generovaná prvky z $T_e G$, a sice $[V_e, W_e] \equiv [V, W]_e$ kde V a W jsou levoinv. pole z V_e a W_e

Lieova algebra abstraktně

Def: Reálná Lieova algebra $\mathcal{L}$ dimenze n je n -rozměrný reálný vektorový prostor, na kterém je definována (kromě součtu vektorů) binární operace nazývaná komutátor $[a, b]$ pro $\forall a, b \in \mathcal{L}$ splňující

- 1) $[a, b] \in \mathcal{L}$ pro $\forall a, b \in \mathcal{L}$ (uzavřenost)
- 2) $[\alpha a + \beta b, c] = \alpha [a, c] + \beta [b, c]$ (linearita)
- 3) $[a, b] = -[b, a]$ (antisymetrickost)
- 4) $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$ (Jacobiho identita)

- důsledkem 2) a 3) je $[a, \beta b + \gamma c] = \beta [a, b] + \gamma [a, c]$ (bilinearita)

- obdobně definice komplexní LA či LA nad tělesem K

- Př:
- 1) vektorový prostor matic $n \times n$ s komutátorem $[A, B] = AB - BA$
 - 2) LA lineárních operátorů s komutátorem $[a, b]f = a(bf) - b(af)$

Adoov teorém: Každá konečně-rozměrná abstraktní Lieova algebra nad tělesem K s nulovou charakteristikou je izomorfní nějaké Lieově algebře matic nad tělesem K .

- takže s pro konečně-rozměrné LA vystačíme s maticemi, viz níže Lieovy algebry maticových grup jako je $GL(n, \mathbb{R})$ kde si ukážeme, že její LA levoinvariantních vektorových polí je izomorfní LA matic $n \times n$

Def. Necht $e_i, i=1, \dots, n$ tvoří bázi v $\mathcal{L}$. Pak $[e_i, e_j]$ musí být lineární kombinace bázevých prvků a píšeme

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k$$

kde c_{ij}^k jsou tzv. strukturní konstanty Lieovy algebry $\mathcal{L}$ vzhledem k bázi e_i .

- c_{ij}^k závisí na bázi a transformují se jako tenzor 3. řádu při změně báze

- každý komutátor $[a, b]$ lze vyjádřit pomocí složek vektorů a, b v bázi a strukturních konstant:

$$[a, b] = \sum_{k,l,m} a^k b^l c_{kl}^m e_m, \text{ kde } a = \sum_{k=1}^n a^k e_k \text{ a } b = \sum_{l=1}^n b^l e_l$$

- z podmínek 3) a 4) v def. LA dostaneme

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k \quad \text{a} \quad c_{pq}^s c_{rs}^t + c_{qr}^s c_{ps}^t + c_{rp}^s c_{qs}^t = 0$$

- pokud je LA asociativna s určitou LG, pak strukturní konstanty LA se též nazývají strukturními konstantami příslušné Lieovy grupy.