

Jednparametrické podgrupy a exponenciální zobrazení

- jde o význačné podgrupy Lieových grup generované prvky Lieovy algebry dává LG, ukážeme si, že půjde o integrální křivky levoinvariantních vekt. polí jdoucí identitou

Def: Jednparametrická podgrupa Lieovy grupy G je křivka $\gamma(t)$, pro kterou platí $\gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s)$, $\gamma(0) = e$, pro $t, s \in \mathbb{R}$, jde tedy o homomorfismus $\gamma: (\mathbb{R}, +) \xrightarrow{do} G$

- obecně nejde o prostý homomorfismus, $\gamma(t)$ je definována pro lib. $t \in \mathbb{R}$, neboť $\gamma(t)\gamma(s)$ má v LG vždy smysl provést
 - pro kompaktní grupy bude jedinou prvek $g = \gamma(t)$ typicky odpovídat mnoho parametrů t

- libovolný prvek jednparam. podgrupy lze psát jako

$$\gamma(t) = \gamma(\varepsilon)^n, \text{ kde } \varepsilon = \frac{t}{n}$$

přičemž ε může být libovolně malé a tedy $\gamma(\varepsilon)$ blízké identitě $\Rightarrow$ každé $\gamma(t)$ pro lib. $t \in \mathbb{R}$ lze napsat jako součin (konečný pro konečné t) prvků z okolí e

$$\left(\begin{array}{l} \text{obdoba} \\ R^2(\varphi) \approx \underbrace{\left(1 - i\frac{\varphi}{n}L_z\right)^n}_{\text{nulá rotace kolem } z} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-i\varphi L_z} \end{array} \right. \leftarrow \begin{array}{l} \text{toto jsou} \\ \text{jednparametrické} \\ \text{podgrupy } SO(3) \\ \text{pro různá } L \end{array} \right)$$

- avšak obecně ne každý prvek $g \in G$ lze zapsat jako $\gamma(\varepsilon)^n$, tj. ne každý prvek leží na jednparam. podgrupě (opak platí jen pro kompaktní grupy)

- příkladem grupy, kde tomu tak je, je $SL(2, \mathbb{R})$, kde existují matice, které nelze vyjádřit jako exponenciála nějaké matice z její Lieovy algebry (viz domácí úloha na LG)

Věta: Každá jednoparametrická podgrupa Lieovy grupy G je integrální křivkou jistého levoinvariantního vekt. pole (jdoucí identitou) a naopak, integrální křivky levoinvariantního vekt. pole V startující v e jsou jednoparametrickými podgrupami G .

Důkaz: $\Rightarrow$ necht' $\gamma(t)$ je jednoparam. podgrupa G a $\dot{\gamma}(0)$ její tečný vektor v e , pak stačí ukázat, že roznesením $\dot{\gamma}(0)$ pomocí levého posunutí (push-forward) dostaneme $\dot{\gamma}(t)$, tj. tečný vektor ke $\gamma(t)$ v čase t ,

ovšem postupně dostáváme

def. levého posunutí

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \gamma(t+s) \underset{\text{definice}}{=} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \gamma(t) \gamma(s) \underset{\text{předpoklad}}{=} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L_{\gamma(t)} \gamma(s) \underset{\text{definice push-forwardu}}{=} \\ &= (L_{\gamma(t)})_* \left(\left. \frac{d\gamma(s)}{ds} \right|_{s=0} \right) \underset{\dot{\gamma}(0)}{=} (L_{\gamma(t)})_* \dot{\gamma}(0) \end{aligned}$$

a tedy opravdu $\dot{\gamma}(t)$ je určeno z $\dot{\gamma}(0)$ pomocí $L_{\gamma(t)}$

$\Leftarrow$ necht' nyní $\gamma(t)$ je integrální křivkou levoinv. vekt. pole V , pak křivka $\Gamma(t) = \gamma(t+s)$ je také integrální křivkou V startující v $\gamma(s)$ (díky $\frac{d(t+s)}{dt} = 1$ a tedy reparametrizace nemění „rychlost“),

ale díky levoinvariantnosti též integr. křivkou vekt. pole $(L_{\gamma(s)})_* V$, což je ale také křivka daná levým posunutím, tj. $L_{\gamma(s)} \dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(s) \dot{\gamma}(t)$ a tedy $\dot{\gamma}(t+s) = \dot{\gamma}(s) \dot{\gamma}(t)$.

Příklad: Jednoparametrické podgroupy $GL(n, \mathbb{R})$

- víme, že levoinv. vekt. pole na $GL(n, \mathbb{R})$ jsou obecně

$$\text{dáný } V_C = x_k^i C_j^k \frac{\partial}{\partial x_j^i}, \text{ kde } C \text{ je lib. reálná matice } n \times n$$

$\Rightarrow$ integrální křivky $\gamma(t) = (x_1^1(t), \dots, x_n^n(t))$ splňují rovnice $\dot{x}_j^i(t) = x_k^i(t) C_j^k$ s poč. podmínkou $x_j^i(0) = \delta_j^i$

- tato soustava má řešení

$$x_j^i(t) = (\exp(tC))^i_j = \delta^i_j + tC^i_j + \frac{t^2}{2!}(C^2)^i_j + \dots$$

neboli maticově

$$x(t) = x(0)C, x(0) = I \Rightarrow x(t) = e^{tC}$$

- vidíme, že pro $GL(n, \mathbb{R})$ jsou jednoparam. podgrupy dány pomocí exponenciály matic C odpovídajících jednotlivým levoinvariantním vekt. polím V_C , a tedy existuje vzájemně jednoznačné přiřazení mezi

prvky LA LG $\leftrightarrow$ levoinv. vekt. poli $\leftrightarrow$ jednoparametrickými podskupami
jakožto maticemi (C) (V_C) (e^{tC})

- to motivuje zavést obecně exponenciální zobrazení z Lieovy algebry do příslušné Lieovy grupy

Def: Necht' $\gamma^V(t)$ je jednoparametrická podgrupa grupy G pro levoinv. vekt. pole V z Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ této grupy, tj. $\dot{\gamma}^V(t) = V_{\gamma(t)}$, pak je definováno exponenciální zobrazení $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$

pomocí vztahu $\exp: V \mapsto e^V = \gamma^V(1)$

Věta: Jednoparametrická podgrupa $\gamma^V(t)$ levoinv. vekt. pole V je dána pomocí exp. zobrazení jako $\gamma^V(t) = e^{tV}$.

Dk: protože $tV \in \mathfrak{g}$, tak dle definice exp. platí $e^{tV} = \gamma^{tV}(1)$

tj. tV je tečný vektor křivky $\gamma^{tV}(k)$ v $k=0$,

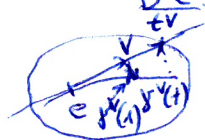
ovšem zároveň je to tečný vektor křivky $\gamma^V(tk)$, neboť

$$\left. \frac{d\gamma^V(tk)}{dk} \right|_{k=0} = \left. \frac{d\gamma^V(tk)}{d(tk)} \right|_{tk=0} \cdot \left. \frac{d(tk)}{dk} \right|_{k=0} = tV$$

a protože $\gamma^{tV}(0) = e = \gamma^V(t \cdot 0)$, jde o stejné křivky

a tedy $\gamma^{tV}(k) = \gamma^V(tk)$ a speciálně $\gamma^{tV}(1) = \gamma^V(t) = e^{tV}$

- speciálně: $e^0 = \gamma^V(0) = e$ a $e^{-V} = \gamma^V(-1) = \gamma^V(1)^{-1} = (e^V)^{-1}$



Pokrytí grupy exponenciálním zobrazením - vybrané výsledky

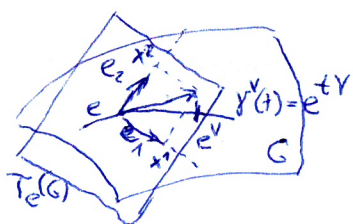
Věta: Každý bod $g \in G$ z jistého okolí e lze zapsat ve tvaru

$$g = e^V \quad \text{pro určitý prvek } V \in \mathfrak{g} = \text{Te}(G)$$

tj. z Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ Lieovy grupy G , přičemž

V je z okolí 0 v $\mathfrak{g}$.

- přirozený výsledek, neboť jak okolí $U(e) \subset G$, tak okolí $U(0) \subset \mathfrak{g}$ jsou diffeomorfní přes $\mathbb{R}^n$, kde n je dimenze G a $\mathfrak{g}$.



- lze takto zavést lokální souřadnice v okolí e , tzv. normální souřadnice, tj. bodu $g = e^V$ z okolí e přiřadíme $(x^1, \dots, x^n)$, což jsou koeficienty rozvoje V do báze $\mathfrak{g}$, tj. $V = \sum_{j=1}^n x^j e_j$

- obecně však nelze každý prvek $g \in G$ zapsat jako e^V , pro $V \in \mathfrak{g}$

- buď má grupa G více komponent, pak $\exp$ zobrazuje pouze do komponenty souvislosti spojené s identitou

- nebo, v případě nekompatních grup mohou existovat body v komponentě souvislosti spojené s e , které nelze exponenciálou dosáhnout, ale obecně platí:

Věta: Každý bod g Lieovy grupy G z její souvislé podgrupy, tj. komponenty spojené s e , lze zapsat jako konečný součin exponenciál z její LA, tj. $g = \prod_{i=1}^r e^{V_i}$, $V_i \in \mathfrak{g}$.

Věta: Pokud je LG G kompaktní, pak každý prvek její souvislé podgrupy lze vyjádřit jako e^V , pro jistý $V \in \mathfrak{g}$

- podrobnosti a důkazy lze najít ve standardních učebnicích, zabývajících se Lieovými grupami, např. od Pontryagina apod.