

Sdružené prvky a jejich třídy (conjugacy classes)

(7)

Def: Prvek $g_1 \in G$ je sdružený s prvkem $g_2 \in G$ ($g_1 \sim g_2$), pokud $\exists h \in G: hg_1h^{-1} = g_2$.

- jde o relaci ekvivalence: 1) $g \sim g$ (pomocí $e \in G$)
2) $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_2 \sim g_1$ (pomocí h^{-1})
3) $g_1 \sim g_2$ a $g_2 \sim g_3 \Rightarrow g_1 \sim g_3$
(díky vztahu $(h_1h_2)^{-1} = h_2^{-1}h_1^{-1}$)

a tedy grupa G se rozpadá na třídy ekvivalence, kterým říkáme třídy sdružených prvků, značí se C_g nebo (g) , které vždy obsahují všechny prvky z G sdružené ke g

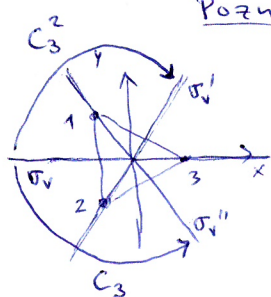
- uvidíme, že tyto třídy hrají důležitou roli v teorii reprezentací grup, u konečných grup bude počet tříd sdružených prvků roven počtu neekvivalentních ireducibilních reprezentací

Pr: $C_{3v} = \{E, C_3, C_3^2, \sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}$

zde dostaneme 3 třídy: $\{E\} = \{E\}$ - identita vždy samostatně ($ge\bar{g}^{-1} = e$)

$(C_3) = \{C_3, C_3^2\}$ - neboť např. $\sigma_v C_3 \sigma_v = C_3^2 = \sigma_v' C_3 \sigma_v' = \sigma_v'' C_3 \sigma_v''$

$(\sigma_v) = \{\sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}$ - nyní např. $C_3 \sigma_v C_3^2 = \sigma_v'' = \sigma_v' \sigma_v \sigma_v'$ atd.



Pozn: geometrická interpretace

- rotaci C_3 lze převést na $C_3^{-1} = C_3^2$ pomocí zrcadlení σ_v ,
ne však pomocí C_3 nebo $C_3^2 \Rightarrow$ grupa C_3 má třídy $(C_3) = \{C_3\}$
 $(C_3^2) = \{C_3^2\}$

- zrcadlení σ_v lze převést na jiné zrcadlení σ_v' nebo σ_v''
buď pomocí rotací, nebo pomocí třetího zrcadlení

toto platí obecně u bodových grup: dvě operace symetrie patří do stejné třídy, pokud existuje operace (v grupě), která převede prvky těchto symetrií na sebe

- na příkladu C_{3v} vidíme, že počet prvků třídy dělí $\#G$

to platí obecně u konečných grup, důkaz později (viz působení grupy na množině a na sobě samé)

- je-li G abelovská, pak $(g) = \{g\}$ pro $\forall g \in G$, neboť $g_1 = hg_2h^{-1} = g_2h\bar{h}^{-1} = g_2$

Normální podgrupa a faktorová grupa

8

Def. Podgrupa $H \leq G$ je normální, pokud pro $\forall g \in G$ platí $gHg^{-1} \subset H$.

- někdy se jí také říká invariantní (vůči sdružení), značení $H \triangleleft G$
- vlastnosti, které mohou sloužit i jako ekvivalentní definice:

1) díky větě o převysporřádání musí ve skutečnosti platit

$$gHg^{-1} = H \quad \text{a tedy} \quad gH = Hg \quad \text{pro } \forall g \in G$$

tj. pro normální podgrupy jsou levé a pravé rozkladové třídy stejné a též obráceně

2) pro normální podgrupu je možné násobit levé (nebo pravé) třídy mezi sebou s tím, že výsledek je opět levá (pravá) třída neboť

$$(g_1H)(g_2H) = (g_1g_2)H \quad \text{díky} \quad Hg_2 = g_2H \quad \text{a} \quad HH = H$$

- druhá vlastnost umožňuje zavést tzv. faktorovou grupu

Def. Množina $G/H = \{gH : g \in G\}$ (levý (nebo pravý) rozklad grupy G , kdy každou třídu bereme pouze jednou) s operací násobení tříd tvoří grupu zvanou faktorová grupa nebo též faktorgrupa.

- jednotkový prvek (identita) je $eH = H$ a inverzní $(gH)^{-1} = g^{-1}H$

Př. normální podgrupa grupy $C_{3v} = G$ je

$C_3 = H = \{E, C_3, C_3^2\}$ neboť jsme viděli dříve, že $gC_3g^{-1} = C_3^2 \in H$ pro $g = \sigma_v, \sigma_v'$ a σ_v'' a pro $g = C_3$ a C_3^2 je výsledek triviálně též v H

- odpovídající levé třídy jsou H a $\sigma_v H = \{\sigma_v, \sigma_v'', \sigma_v'\}$ a tedy faktorgrupa $C_{3v}/C_3 = \{H, \sigma_v H\}$, která je izomorfní s grupou $C_2 = \{E, \sigma\}$

- ovšem podgrupa $\{E, \sigma_v\}$ není normální,

neboť např. $\sigma_v' \sigma_v \sigma_v' = C_3 \sigma_v' = \sigma_v'' \notin \{E, \sigma_v\}$

- normální podgrupy jsou důležité pro rozklady grup na přímé a polopřímé součiny

Přímý (též direktní) součin grup

9

Def: Necht' G_1 a G_2 jsou libovolné grupy a $g_1 \in G_1$ a $g_2 \in G_2$.

Množina všech uspořádaných dvojic (g_1, g_2)

s binární operací $(g_1, g_2)(h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)$ tvoří grupu,

kteřá se nazývá přímý (direktní) součin grup G_1 a G_2 a

kteřá se značí $G_1 \otimes G_2$ (nebo i $G_1 \times G_2$).

- identita je (e_1, e_2) a inverzní prvek $(g_1, g_2)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1})$.
- řád této grupy je $\# G_1 \otimes G_2 = \# G_1 \cdot \# G_2$ (pro konečné grupy)
- $\{(g_1, e_2) : g_1 \in G_1\}$ tvoří podgrupu (normální) izomorfní s G_1 , a podobně pro $G_2 \sim \{(e_1, g_2) : g_2 \in G_2\}$, prvky těchto podgrup komutují $(g_1, e_2)(e_1, g_2) = (g_1, g_2) = (e_1, g_2)(g_1, e_2)$ a mají jediný společný prvek (e_1, e_2)
- navíc lze každý prvek $G_1 \otimes G_2$ vyjádřit jako součin dvou prvků z těchto podgrup $\Rightarrow$

Def: Řekneme, že určitá grupa G je přímým součinem dvou svých podgrup G_1 a G_2 , pokud je izomorfní grupě $G_1 \otimes G_2$.

- výše uvedené vlastnosti jsou dostatečným kritériem:
 - pokud $G_1 \leq G$ a $G_2 \leq G$, které mají jediný společný prvek e , všechny prvky $g_1 \in G_1$ komutují se všemi $g_2 \in G_2$ a každý prvek $g \in G$ lze psát jako $g = g_1 g_2$, pak je nutné $G \sim G_1 \otimes G_2$ a jde tedy o přímý součin G_1 a G_2 .
- z podmínky $G_1 \cap G_2 = \{e\}$ plyne jednoznačnost rozkladu $g = g_1 g_2$ neboť kdyby $g = g_1 g_2 = h_1 h_2 \Rightarrow \underbrace{h_1^{-1} g_1}_{\in G_1} = \underbrace{h_2 g_2^{-1}}_{\in G_2} = e$ a tedy $h_1 = g_1$ a $h_2 = g_2$
- podmínka komutativity $\forall g_1 \in G_1$ se $\forall g_2 \in G_2$ je ekvivalentní podmínce, že G_1 a G_2 jsou normální podgrupy

Dk: $\Rightarrow$ necht' $g = h_1 h_2$, pak $g g_1 g_1^{-1} = h_1 h_2 g_1 h_2^{-1} h_1^{-1} = h_1 g_1 h_1^{-1} \in G_1$, a podobně pro G_2

$\Leftarrow$ uvažujme komutátor $\underbrace{g_1}_{\in G_1} \underbrace{g_2 g_2^{-1} g_1^{-1}}_{\in G_2} \in G_1 \cap G_2$ a tedy $= e \Rightarrow g_1 g_2 = g_2 g_1$

Polopřímý (též semidirektní) součin grup

(10)

• aneb, když je jen jedna z podgrup normální

Def: G je polopřímým součinem dvou svých podgrup G_1 a G_2 , tj. $G = G_1 \oplus G_2$, nebo $G = G_1 \rtimes G_2$, pokud

- 1) G_1 a G_2 mají jediný společný prvek e
- 2) $\forall g \in G$ lze napsat jako $g = g_1 g_2$, kde $g_1 \in G_1$ a $g_2 \in G_2$
- 3) G_1 je normální podgrupou grupy G

• opět 1) implikuje jednoznačnost rozkladu $g = g_1 g_2$

Př: C_{3v} je polopřímý součin podgrup $G_1 = \{E, C_3, C_3^2\}$, která je normální, a $G_2 = \{E, \sigma_v\}$, která není normální, neboli

$$C_{3v} = \{E, C_3, C_3^2\} \rtimes \{E, \sigma_v\} = C_3 \rtimes C_2$$

neboť $\forall g \in C_{3v}$ lze zapsat jako $g_1 g_2$:

$$E = E \cdot E, \quad C_3 = C_3 E, \quad C_3^2 = C_3^2 E, \quad \sigma_v = E \sigma_v, \quad \sigma_v' = C_3 \sigma_v, \quad \sigma_v'' = C_3^2 \sigma_v$$

- ovšem nejde o přímý součin, neboť C_3 a C_3^2 nekomutují s σ_v

- $\{E, C_3, C_3^2\} \times \{E, \sigma_v\}$ je ve skutečnosti izomorfní

s cyklickou 6-prvkovou grupou, generátorem je $(C_3, \sigma_v)^6 = (E, E)$

Př: Euklidovská grupa E^3 je grupa všech lin. transformací v $\mathbb{R}^3$ zachovávajících vzdálenosti a úhly:

G_1 je nyní podgrupa všech translací (je normální)

a G_2 podgrupa všech rotací (můžou být i nevlastní)

neboť je-li $\vec{r}' = \{R, \vec{t}\} \vec{r} = R \vec{r} + \vec{t}$, tak složení -

$$\text{dostaneme} \quad \{R_1, \vec{t}_1\} \{R_2, \vec{t}_2\} = \{R_1 R_2, R_1 \vec{t}_2 + \vec{t}_1\}$$

$$\{R, \vec{t}\}^{-1} = \{R^{-1}, -R^{-1} \vec{t}\}$$

$$\text{a tedy} \quad \underbrace{\{R, \vec{t}\}}_{\in E^3} \underbrace{\{1, \vec{a}\}}_{\in G_1} \underbrace{\{R, \vec{t}\}^{-1}}_{\in E^3} = \{1, R \vec{a}\} \in G_1 \quad (\text{opět translace})$$

$$\text{a protože} \quad \{R, \vec{t}\} = \{1, \vec{t}\} \{R, \vec{0}\}$$

$$\text{musí být} \quad E^3 = G_1 \rtimes G_2$$

• podobně lze rozložit Poincaréovu grupu

Více o třídách sdružených prvků a normálních podgrupách

- Násobení tříd a tzv. konstanty tříd (toto bude důležité později při důkazu #ired. repr. = # tříd sdružených prvků v konečné grupě)
 - pokud vynásobíme dvě třídy sdružených prvků a ponecháme všechny součiny včetně opakujících se, dostaneme

$$(g_k)(g_e) = \{g_i g_j \mid g_i \in (g_k) \text{ a } g_j \in (g_e)\} = \sum_{(g_m)} C_{ke}^m (g_m)$$

kde $C_{ke}^m \geq 0$ jsou konstanty tříd přes všechny třídy (různé)

a protože se prvky můžou opakovat, může být $C_{ke}^m > 1$ pro jisté k, e, m

- toto plyne z obecnějšího tvrzení:

Nechť C je množina prvků G , ve které se můžou prvky opakovat, (tj. nelze psát $C \leq G$). Pak

$$g C g^{-1} = C \text{ pro } \forall g \in G \iff C = \sum_{(g_k)} a_k (g_k)$$

zde opět ponecháváme všechny výsledné prvky opět suma přes všechny různé třídy

Dk: $\Rightarrow$ spor

$$\text{Nechť } g C g^{-1} = C \text{ pro } \forall g \in G \text{ a zároveň } C = \sum_{(g_k)} a_k (g_k) + Z$$

kde Z je neprázdná a pro $a \in Z : (a) \not\subset Z$ zbytek, kde nejsou úplné třídy

Pak ale dle předpokladu $g Z g^{-1} = Z$ pro $\forall g \in G$,

toto je vlastně důkaz $\Leftarrow \rightarrow$ [neboť $g(g_k)g^{-1} = (g_k)$ (dle v.o.p) a tedy $g(\sum_{(g_k)} a_k (g_k))g^{-1} = \sum_{(g_k)} a_k (g_k)$]

atedy pokud $a \in Z$, pak i $g a g^{-1} \in Z \Rightarrow (a) \subset Z$ což je spor

Pr: C_{3v} má třídy

$$\begin{aligned} (E) &= \{E\} \\ (C_3) &= \{C_3, C_3^2\} \\ (\sigma_v) &= \{\sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\} \end{aligned}$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} (E)(g_k) &= (g_k) \text{ pro } g_k \text{ libovolné} \\ (C_3)(C_3) &= \{C_3^2, E, E, C_3\} = 2(E) + (C_3) \\ (C_3)(\sigma_v) &= 2(\sigma_v) \\ (\sigma_v)(C_3) &= 2(\sigma_v) \\ (\sigma_v)(\sigma_v) &= 3(E) + 3(C_3) \end{aligned}$$

toto jsou konstanty tříd

- Věta: $H \triangleleft G \iff H$ se skládá z celých tříd sdružených prvků grupy G .

Dk: Zřejmý z definice a tvrzení výše o množině

$$C : g C g^{-1} = C \iff C = \sum_{(g_k)} a_k (g_k)$$

- Centrum grupy G je podgrupa $Z(G)$ obsahující prvky G , které komutují se všemi $g \in G$, tj. (zřejmě jde tedy o abelovskou podgrupu)

$$Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz \text{ pro } \forall g \in G\}$$

- jde vskutku o podgrupu: $e \in Z(G)$
 $zg = gz \Rightarrow g\bar{z}^{-1} = \bar{z}^{-1}g$ (asociativita)
 zřejmě

$$\text{a pro } z_1 \in Z(G) \text{ a } z_2 \in Z(G) \Rightarrow z_1 z_2 g = z_1 g z_2 = g z_1 z_2$$

- jde o normální podgrupu (neboť $g z \bar{g}^{-1} = z g \bar{g}^{-1} = z$)

složenou z jednoprvkových tříd $(z) = \{z\}$

- pokud je G abelovská, pak $Z(G) = G$

- Grupa je prostá (simple), pokud neobsahuje žádnou netriviální (tj. různou od $\{e\}$ a G) normální podgrupu

- Grupa je poloprostá (semi simple), pokud neobsahuje žádnou netriviální abelovskou normální podgrupu

- tyto charakterizace grup hrají důležitou roli v klasifikaci konečných a Lieových grup a také v teorii reprezentací grup

- umožňují vyšetřovat vztahy mezi grupami
- speciálním homomorfismem bude reprezentace grupy na vektorovém prostoru, půjde o homomorfismus z grupy do grupy všech lineárních transformací na tomto prostoru

Def: Homomorfismus z grupy G do grupy H je

zobrazení $\varphi: G \rightarrow H$, pro které platí $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

tj. φ přenáší (zachovává) grupovou operaci. pro $\forall a, b \in G$,

- pro $b = e_G$: $\varphi(ae_G) = \varphi(a) = \varphi(a) \cdot \varphi(e_G) \Rightarrow \varphi(e_G) = e_H$, obdobně $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$

- Izomorfismus = bijektivní (prostý a na) homomorfismus

Monomorfismus = injektivní (prostý) homomorfismus

Epimorfismus = surjektivní (na) homomorfismus

- Pokud jsou obě grupy stejné, tj. $G = H$, pak se

homomorfismus nazývá endomorfismus

a izomorfismus je automorfismus.

- Speciálně vnitřní automorfismus je $\phi_a(g) = aga^{-1}$ pro $\forall a, g \in G$.

- Obdobně je to i v jiných matematických strukturách,

jako vektorových prostorů či Lieových algeber.

$$\varphi(\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha \varphi(\vec{v}) + \beta \varphi(\vec{w}) \quad \varphi([\vec{v}, \vec{w}]) = [\varphi(\vec{v}), \varphi(\vec{w})]$$

Def: Necht' $\varphi: G \rightarrow H$ je homomorfismus.

Pak $\text{Ker } \varphi = \{g \in G : \varphi(g) = e_H\}$ je jádro homomorfismu

a $\text{Im } \varphi = \{h \in H : h = \varphi(g) \text{ pro nějaké } g \in G\}$ je obraz hom.

- platí, že $(1) \text{Ker } \varphi$ je normální podgrupa grupy G

Dk: Necht' $g \in \text{Ker } \varphi$ a $a \in G$, pak (že jde o podgrupu je přímo zřejmě)

$$\varphi(aga^{-1}) = \varphi(a)\varphi(g)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)e_H\varphi(a^{-1}) = e_H$$

neboli $aga^{-1} \in \text{Ker } \varphi$ pro libovolné $a \in G$

2) $\text{Im } \varphi$ je podgrupa grupy H

Dk: $e_H \in \text{Im } \varphi$ neboť $\varphi(e_G) = e_H$

$$\varphi(a)^{-1} \in \text{Im } \varphi \text{ neboť } \varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$$

uzavřenost a asociativita z definice a vlastností G

- pokud je H normální podgrupa grupy G , tj. $H \triangleleft G$,
potom zobrazení $\pi: G \rightarrow G/H$
 $\pi: g \mapsto gH$ pro $\forall g \in G$

nazýváme přirozená projekce G na faktorgrupu G/H .

- π je epimorfismus a $\text{Ker } \pi = H$

neboť pro $\forall g, h \in G$: $\pi(gh) = ghH = (gH)(hH) = \pi(g)\pi(h)$

a navíc pro $h \in H$: $\pi(h) = hH = eH$, což je identita v G/H

a pokud $g \notin H$: $\pi(g) = gH \neq H$

Působení grupy na množině či prostoru

- pokud je určitá abstraktní grupa realizována jako transformace nějaké množiny či prostoru, říkáme, že grupa působí na této množině či prostoru, ovšem obecně nemusí jít o realizaci grupy

Def: Grupa G působí na množině M , pokud existuje zobrazení

$\varphi: G \times M \rightarrow M$ takové, že pro všechny $g \in G$ a $m \in M$

je dáno $\varphi(g, m) = T(g)m \equiv g \cdot m$, kde $T(g)$ je nějaká transformace M

a platí

$g(h \cdot m) = (gh) \cdot m$ pro $\forall g, h \in G$ a $m \in M$

a $e \cdot m = m$ pro $\forall m \in M$ a identitu $e \in G$

- jde tedy o homomorfismus z G do grupy všech transformací množiny M , tj. není nutno, aby různým prvkům $g, h \in G$ odpovídaly různé transformace $T(g)$ a $T(h)$ (možná $T(g) = T(h)$)
- uvidíme později, že reprezentace grup jsou jejich lineární působení na vektorových prostorech