

- pokud je H normální podgrupa grupy G , tj. $H \triangleleft G$,
potom zobrazení $\pi: G \rightarrow G/H$
 $\pi: g \mapsto gH$ pro $\forall g \in G$

nazýváme přirozená projekce G na faktorgrupu G/H .

- π je epimorfismus a $\text{Ker } \pi = H$

neboť pro $\forall g, h \in G$: $\pi(gh) = ghH = (gH)(hH) = \pi(g)\pi(h)$

a navíc pro $h \in H$: $\pi(h) = hH = eH$, což je identita v G/H

a pokud $g \notin H$: $\pi(g) = gH \neq H$

Působení grupy na množině či prostoru

- pokud je určitá abstraktní grupa realizována jako transformace nějaké množiny či prostoru, říkáme, že grupa působí na této množině či prostoru, ovšem obecně nemusí jít o realizaci grupy

Def: Grupa G působí na množině M , pokud existuje zobrazení

$\varphi: G \times M \rightarrow M$ takové, že pro všechny $g \in G$ a $m \in M$

je dáno $\varphi(g, m) = T(g)m \equiv g \cdot m$, kde $T(g)$ je nějaká transformace M

a platí

$g(h \cdot m) = (gh) \cdot m$ pro $\forall g, h \in G$ a $m \in M$

a $e \cdot m = m$ pro $\forall m \in M$ a identitu $e \in G$

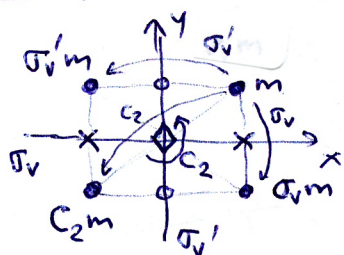
- jde tedy o homomorfismus z G do grupy všech transformací množiny M , tj. není nutno, aby různým prvkům $g, h \in G$ odpovídaly různé transformace $T(g)$ a $T(h)$ (může být $T(g) = T(h)$)
- uvidíme později, že reprezentace grup jsou jejich lineární působení na vektorových prostorech

Def: Orbita prvku $m \in M$ při působení grupy G
je podmnožina $G \cdot m \subset M$ složená z prvků $g \cdot m \in M$
pro $\forall g \in G$, tj. $G \cdot m = \{g \cdot m, g \in G\}$

Def: Stabilizátor (též izotropní grupa) G_m příslušný
prvku $m \in M$ je množina $g \in G$, pro které $g \cdot m = m$.

- jde o podgrupu $G_m \leq G$, neboť $e \in G_m$ (z definice)
a pokud $g \in G_m$, pak $m = e \cdot m = (g^{-1}g) \cdot m = g^{-1}(g \cdot m) = g^{-1} \cdot m$
a navíc pokud $g \cdot m = m$ a $h \cdot m = m$, pak $(g \cdot h) \cdot m = g(h \cdot m) = m$

Pr: působení C_{2v} (grupa symetrie H_2O) v rovině (x, y)



obecný bod $\diamond$ má 4-prvkovou orbitu a $G_\diamond = \{E\}$
bod na ose x má 2-prvkovou orbitu a $G_x = \{E, \sigma_v\}$
bod na ose y má 2-prvkovou orbitu a $G_y = \{E, \sigma_v'\}$
a počátek $\diamond$ má 1-prvkovou orbitu a $G_\diamond = C_{2v}$

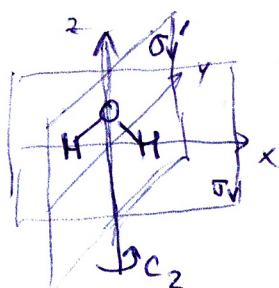
Věta: Pro konečnou grupu platí obecně $\#G = \#G_m \cdot \#(G \cdot m)$

Dk: G_m je podgrupa G a tedy dle Lagrangeovy věty
 $\#G_m$ dělí $\#G$. Navíc máme rozklad G na levé
trždy $g \cdot G_m$, pro které platí $(g \cdot G_m) \cdot m = g \cdot m = n$,
tj. všechny prvky jedné levé trždy převádí m na stejný
bod n .

A protože nemůže pro dvě různé levé trždy platit,
že $(g_1 G_m) \cdot m = (g_2 G_m) \cdot m = n$, neboť pak by platilo
 $g_1 \cdot m = g_2 \cdot m \Rightarrow (g_1^{-1} g_2) \cdot m = m \Rightarrow g_1^{-1} g_2 \in G_m$
 $\Rightarrow g_2 = g_1 (g_1^{-1} g_2) \in g_1 G_m$ a zároveň $\in g_2 G_m$, což je
spor,
dostáváme tolik různých bodů orbity,
kolik je levých tržd $g G_m$, a tedy $\#G = \#G_m \cdot \#(G \cdot m)$.

Př: působení $C_{2v} = \{E, C_2, \sigma_v, \sigma_v'\}$ v prostoru $\mathbb{R}^3$

(16)



	E	C_2	σ_v	σ_v'
C_2	E	σ_v'	σ_v	
σ_v	σ_v'	E	C_2	
σ_v'	σ_v	C_2	E	

- zobrazení φ je dáno maticemi 3×3 odpovídajícími příslušným transformacím:

$$D(g) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

kde $D(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D(C_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D(\sigma_v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D(\sigma_v') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• tyto čtyři matice tvoří grupu s bin. operací maticové násobení, která je samozřejmě izomorfní s C_{2v} , jde o tzv.

věrnou maticovou reprezentaci grupy C_{2v}

a jde o podgrupu $O(3)$ (= grupa všech matic s $\det = \pm 1$)

a máme tedy homomorfismus z C_{2v} do $O(3)$ (transformace na prostoru $\mathbb{R}^3$)

- v tomto případě lze ale působit zvlášť na x, y a z :

např. pro x : $D_x(E) = (1)$, $D_x(C_2) = (-1)$, $D_x(\sigma_v) = (1)$ a $D_x(\sigma_v') = (-1)$

přičemž platí $D_x(g)(x) = (x')$

nyní jde o homomorfismus (dokonce epimorfismus)

z C_{2v} na $G = (\{1, -1\}, \cdot) = "O(1)"$

obdobně pro y , avšak pro působení na z bude (avšak jiná rep.)

$$D_z(E) = D_z(C_2) = D_z(\sigma_v) = D_z(\sigma_v') = (1)$$

a jde o tzv. triviální reprezentaci z C_{2v} na $G = (\{1\}, \cdot)$

- $D(g)$ tvoří třírozměrnou reprezentaci a $\text{Ker } D = \{E\}$

- $D_x(g)$ a $D_y(g)$ tvoří různé jednozměrné reprezentace,

které jsou netriviální s $\text{Ker } D_x = \{E, \sigma_v\}$ a $\text{Ker } D_y = \{E, \sigma_v'\}$

a konečně $D_z(g)$ je triviální s $\text{Ker } D_z = C_{2v}$

Působení grupy G na sobě

- pokud $M=G$, působí grupa G na sobě same
- je několik možností, jak může působit, např.

1) levé a pravé posunutí:

pro $\forall g \in G$ definujeme zobrazení

$$L_g: G \rightarrow G \text{ neboli } L_g: h \mapsto gh$$

$$R_g: G \rightarrow G \text{ neboli } R_g: h \mapsto hg$$

- jde o bijektivní zobrazení (viz VoP)

a navíc o tzv. tranzitivní působení G na sobě,

neboť G tvoří jedinou orbitu a vždy $G_g = \{e\}$ pro $\forall g \in G$.

2) G působí na sobě přes sdružení (tzv. vnitřní automorfismus)

$$\text{kdy } T(g) \cdot h = ghg^{-1} \text{ pro } \forall g, h \in G$$

$$\text{neboť platí } T(e) \cdot h = eh e^{-1} = h$$

$$\text{a } T(g_1 g_2) \cdot h = (g_1 g_2) h (g_1 g_2)^{-1} = g_1 (g_2 h g_2^{-1}) g_1^{-1} =$$

$$= T(g_1) T(g_2) \cdot h$$

- nyní jsou orbitami třídy sdružených prvků

a stabilizátory jsou podgrupy G složene

$$\text{z prvků } g \in G, \text{ pro které } ghg^{-1} = h$$

$$\text{- opět musí platit } \#(G \cdot g) \cdot \#G_g = \#G$$

a tedy počet prvků třídy sdružených prvků $\#(g) = \#(G \cdot g)$
musí dělit $\#G$.

Př. vnitřní automorfismus C_{3v}

třídy

stabilizátory

$$(E) = \{E\}$$

$$G_E = C_{3v}$$

$$(C_3) = \{C_3, C_3^2\}$$

$$G_{C_3} = \{E, C_3, C_3^2\} \text{ neboť } C_3 C_3 C_3^{-1} = C_3, \sigma_v C_3 \sigma_v^{-1} = C_3^2 \text{ atd.}$$

$$(\sigma_v) = \{\sigma_v, \sigma_v', \sigma_v''\}$$

$$G_{\sigma_v} = \{E, \sigma_v\} \text{ neboť } \sigma_v \sigma_v \sigma_v^{-1} = \sigma_v$$

$$\text{ale } C_3 \sigma_v C_3^{-1} = \sigma_v'' = \sigma_v' \sigma_v \sigma_v^{-1}$$

a pod.

Reprezentace grup a algeber

18

- obecně jde o působení jisté matem. struktury na vektorovém prostoru pomocí lineárních operátorů $\rightarrow$ někdy se upřesňuje, že jde o lineární reprezentace, když je třeba je odlišit od nelineárních působení
- máme tedy lib. vekt. prostor V (reálný, komplexní atd.), pak
 - $\text{End}(V)$ značí množinu všech lineárních operátorů na V (včetně nulového $0: \vec{v} \rightarrow \vec{0}$)
 - $\text{Aut}(V)$ značí množinu všech lin. op. na V , ke kterým existuje inverzní operátor (tj. jde o lineární transformace na V)
- z $\text{End}(V)$ (= endomorfismy na V) lze vytvořit buď
 - 1) tzv. asociativní algebru (= vekt. prostor s asociativním součinem, přičemž $(f \cdot g)\vec{v} = f(g\vec{v})$)
 - nebo
 - 2) tzv. Lieovu algebru s komutátorem $[f, g]\vec{v} = (f \cdot g - g \cdot f)\vec{v}$ splňujícím axiomy pro Lieovy alge.
- $\text{Aut}(V)$ (= automorfismy V) $\sim \text{GL}(V)$
 - tvorí grupu díky asociativitě a existenci inverzního $f^{-1} \in \text{Aut}(V)$ pro $\forall f \in \text{Aut}(V)$

$\Rightarrow$ na V lze působit grupami, asoc. a Lieovými algebrami a tato působení nazýváme reprezentace

Def: Reprezentace grupy G na V je homomorfismus $\rho: G \xrightarrow{\text{do}} \text{Aut}(V)$ identita na V
tj. pro $\forall g_1, g_2 \in G$ platí $\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \rho(g_2)$, $\rho(e) = E$, $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}$

Reprezentace Lieovy algebry $\mathcal{L}$ na V je homomorfismus $\phi: \mathcal{L} \xrightarrow{\text{do}} \text{End}(V)$
tj. pro $\forall a, b \in \mathcal{L}$ platí $\phi(\alpha a + \beta b) = \alpha \phi(a) + \beta \phi(b)$, $\phi([a, b]) = [\phi(a), \phi(b)]$

(obdobně pro asoc. algebry, kterými se však dále nebudeme zabývat, i když mají velký význam i v matem. teorii reprezentací grup)

Rozměr reprezentace = dimenze vekt. prostoru V

Triviální reprezentace = repr. kdy $\forall g \in G$ přiřadíme identitu na V (též jednotková)
nebo kdy $\forall a \in \mathcal{L}$ přiřadíme nulový operátor na V (nulová)

(speciálně každá grupa má jednorozměrnou ($\dim V = 1$) ireducibilní repr. (viz později)
tvorenou 1 = pro $\forall g \in G$, někdy se jí říká totálně symetrická repr.)

Věrná reprezentace, pokud jde o monomorfismus (každému $g \in G$ přiřadíme různý operátor na V)

Značení: dvojice (g, V) jako označení repr. se používá, když je třeba zdůraznit jak zobr. g , tak prostor V . Ve fyzice je často V znám z kontextu takže se používá Γ pro obecné označení repr. a speciální symboly pro

$T(s)$ pro repr. operátory
 $D(s)$ pro repr. maticemi

ireducibilní repr. (viz později)

- reprezentací je nekonečně mnoho na různě rozměrných prostorech
a i na jednom V mohou být různé reprezentace (triviální a další netriviální repr.)
avšak mnohé lze převádět mezi sebou (pojem ekvivalence)
a nebo rozložit na méně rozměrné (pojem reducibility a irreducibility)

Def: Necht' V_1 a V_2 jsou vekt. prostory a $\phi: V_1 \rightarrow V_2$ je izomorfismus mezi nimi
(tj. $\exists \phi^{-1}$ a $\dim V_1 = \dim V_2$). Pak repr. $(\phi \circ \rho \circ \phi^{-1}, V_2)$ je ekvivalentní repr. (ρ, V_1) .
Neboli (ρ, V_1) a (σ, V_2) jsou ekvivalentní repr. grupy G (příp. algebry),
pokud $\exists \phi: V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ takové, že $\sigma = \phi \circ \rho \circ \phi^{-1}$.

Pozn: V matematice se často používá tzv. splétající (intertwining) zobrazení,
což je v tomto případě lin. zobrazení $S: V_1 \rightarrow V_2$ mezi vekt. prostory, které
splňuje pro 2 repr. (ρ, V_1) a (σ, V_2) vztah
$$\sigma(\rho(g)) \vec{v} = \sigma(\rho(g) \circ S \vec{v}) \text{ pro } \forall g \in G \text{ a } \forall \vec{v} \in V_1$$

$\begin{matrix} V_1 & \xrightarrow{S} & V_2 \\ \rho(g) \downarrow & & \downarrow \sigma(g) \\ V_1 & \xrightarrow{\rho(g)} & V_1 \end{matrix}$

$S(g) \downarrow$

$\begin{matrix} V_1 & \xrightarrow{S} & V_2 \\ \rho(g) \downarrow & & \downarrow \sigma(g) \\ V_1 & \xrightarrow{\rho(g)} & V_1 \end{matrix}$

neboli (ρ, V_1) a (σ, V_2) jsou ekvivalentní, pokud $\exists$ splétající izomorfismus V_1 a V_2
(někdy též izomorfni)
(tj. $\exists S^{-1}$)

- aby (ρ, V_1) a (σ, V_2) byly ekvivalentní, musí být $\dim V_1 = \dim V_2$, ale není
to postačující podmínka

Pr. $V = \mathbb{R}$, $G = \{E, i = \text{inverze}\}$ (identita)
na V existují 2 neekvivalentní repr. 1) (ρ, V) , kde $\rho(E) = 1$, $\rho(i) = 1$
(triviální, symetrická repr.)
(Pozn. ve fyzice jde o paritu -
- chování vlnové fce při inverzi, 2) (σ, V) , kde $\sigma(E) = 1$, $\sigma(i) = -1$,
bude se mění, nebo nemění znaménko)
(antisymetrická repr.)

Pr. Ekvivalentní maticové reprezentace při změně báze

Necht' (ρ, V) je repr. grupy G na V ($\dim V = n$) a zvolme ve V bázi e_i ,
tj. $\forall x \in V$ lze psát jako $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Působení grupy G na V můžeme
v této bázi vyjádřit takto:

$\forall g \in G$ přiřadí $T(g)$, který po zapůsobení na prvek báze dá
jistou lin. kombinaci prvků báze, neboli

$$T(g) e_i = \sum_{k=1}^n D(g)_{ki} e_k \quad (\text{tj. dostaneme matici } D(g))$$

a pro změnu obecného vektoru dostaneme

$$x' = T(g) x = \sum_{i=1}^n x_i T(g) e_i = \sum_{i,k=1}^n x_i D(g)_{ki} e_k = \sum_{k=1}^n x'_k e_k$$

díky linearitě $T(g)$

neboli $x'_k = \sum_{i=1}^n D(g)_{ki} x_i$ (zde již standardní násobení matice krát vektor, ne rozdíl od $T(g) e_i = \sum_{k=1}^n e_k D(g)_{ki}$)

matice $D(g)$ tvoří tzv. maticovou reprezentaci grupy G (kdy není obecně třeba mluvit o V)

jde opravdu o reprezentaci neboť $D(e) = 1_{n \times n}$

$$\begin{aligned} a \quad T(g_1)T(g_2)x &= \sum_{i,k=1}^n x_i D(g_2)_{ki} T(g_1)e_k = \sum_{i,k=1}^n x_i D(g_2)_{ki} D(g_1)_{lk} e_l = \sum_{i,l,k=1}^n x_i D(g_2)_{ki} D(g_1)_{lk} e_l \\ &= \sum_{i,l,k=1}^n x_i \underbrace{D(g_1)_{lk} D(g_2)_{ki}}_{[D(g_1)D(g_2)]_{li}} e_l \end{aligned}$$

ale zároveň $= T(g_1 g_2)x = \sum_{i,l=1}^n x_i D(g_1 g_2)_{li} e_l$

a tedy $D(g_1 g_2) = D(g_1)D(g_2)$ jde tedy o homomorfismus z grupy G do grupy matic $n \times n$

zvolme nyní jinou bázi na V $\tilde{e}_i = \sum_{j=1}^n e_j A_{ji}$, kde A je matice přechodu definující

jisté zobrazení z V na V (složky vektoru $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ se transformují pomocí inverzní matice, neboť $x = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \tilde{e}_i = \sum_{i,j=1}^n x_j (A^{-1})_{ji} \tilde{e}_i$ a tedy $\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^n (A^{-1})_{ij} x_j$)

Působení G na V lze tedy vyjádřit

též jako $T(g)\tilde{e}_i = \sum_{k=1}^n \tilde{D}(g)_{ki} \tilde{e}_k$, kde $\tilde{D}(g)$ bude obecně jiná matice než $D(g)$

a dále $= \sum_j A_{ji} T(g)e_j = \sum_{j,k=1}^n A_{ji} D(g)_{kj} e_k = \sum_{j,l,k=1}^n A_{ji} D(g)_{kj} (A^{-1})_{lk} \tilde{e}_l$

neboli $\tilde{D}(g)_{li} = \sum_{k,j=1}^n (A^{-1})_{lk} D(g)_{kj} A_{ji} = \sum_{k,j=1}^n B_{lk} D(g)_{kj} (B^{-1})_{ji}$ kde jsme označili $A^{-1} = B$

maticově $\tilde{D}(g) = B D(g) B^{-1}$

tj. $\tilde{D}(g)$ a $D(g)$ jsou svázané podobnostní transformací a říkáme, že v tomto případě jsou $\tilde{D}(g)$ a $D(g)$ ekvivalentní maticové repr.

[tutéž dostaneme „souřadnicově“ $\tilde{x} = Bx$, $x' = D(g)x$ neboli opět $\tilde{D}(g) = B D(g) B^{-1}$
 $\tilde{x}' = \tilde{D}(g)\tilde{x} = Bx' = B D(g)x = B D(g) B^{-1} \tilde{x}$]

Reducibilní a ireducibilní reprezentace

- při působení grupy či algebry na V se může stát, že určitý netriviální ($\neq 0, V$) podprostor $W \subset V$ zůstává nezměněn, tj. např. pro grupu G platí $g(s)\vec{w} \in W$ pro určitou repr. (g, V) a $\forall g \in G, \forall \vec{w} \in W$

Def: Podprostor $W \subset V$, který se nemění při působení G na V , se nazývá invariantní podprostor a pokud neobsahuje žádný další netriviální ($\neq 0, W$) invariantní podprostor, pak jde o ireducibilní invariantní podprostor. stručně lze psát $G \cdot W \subset W$

Def. Pokud V obsahuje při působení G pomocí repr. (g, V) netriviální invariantní podprostor, říkáme, že jde o reducibilní prostor a že (g, V) je reducibilní reprezentace. V opačném případě jde o ireducibilní reprezentaci.

Def. Podreprezentace repr. (g, V) grupy G je repr. (g_W, W) , kde W je invariantní podprostor V při působení G .

• Co to znamená pro maticové reprezentace?

- pokud zvolíme bázi tak, že $e_1, \dots, e_r \in W$ ($\dim W = r$) a $e_{r+1}, \dots, e_d \in V$, ale $\notin W$ ($\dim V = d$) pak dostaneme

$$D(g) = \begin{pmatrix} \underbrace{D^W(g)}_r & \underbrace{D^{W'}(g)}_{d-r} \\ 0 & \underbrace{D^{W'}(g)}_{d-r} \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{kde } W' \text{ značí lineární obal} \\ W' = \langle e_{r+1}, \dots, e_d \rangle \end{array} \right\}$$

tj. $T(g)e_i = \sum_{k=1}^r e_k D(g)_{ki}$ pro $i=1, \dots, r$

a matice $D^W(g)$ tvoří podreprezentaci repr. $D(g)$, neboť

$$D(g_1)D(g_2) = \begin{pmatrix} D^W(g_1)D^W(g_2) & D^W(g_1)D^{W'}(g_2) + D^{W'}(g_1)D^W(g_2) \\ 0 & D^{W'}(g_1)D^{W'}(g_2) \end{pmatrix}$$

- vektorům $e_1, \dots, e_d$ se říká báze reprezentace (g, V)

a $e_1, \dots, e_r$ tvoří bázi podrepr. (g_W, W)

Tyto matice též tvoří repr. grupy G ale nejde obecně o podrepr. repr. $D(g)$ protože W' nemusí být invariantní podprostor

- v obecné bázi prostoru V by matice $D(g)$ neměly tvar $\begin{pmatrix} \text{?} & \text{?} \\ 0 & \text{?} \end{pmatrix}$, ale byly by plné, ale existovala by podobnostní transformace, která by všechny matice pro $g \in G$ převedla na tento tvar $\Rightarrow$ někdy, když se pracuje pouze s maticovými reprezentacemi, je definice reducibility zavedena pomocí existence takové podobnostní transformace, tj.

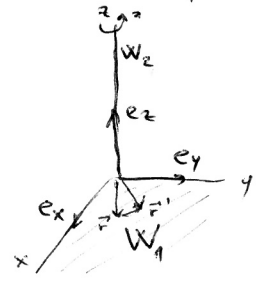
maticová reprezentace je reducibilní, pokud je ekvivalentní repr.

$$D(g), \text{ kde } \forall D(g) \text{ jsou matice typu } \begin{pmatrix} \text{?} & \text{?} \\ 0 & \text{?} \end{pmatrix}, \text{ tj. } \exists A \text{ takové, že} \\ D'(g) = A D(g) A^{-1} \text{ pro } \forall g \in G$$

Věta: Každá ireducibilní repr. konečné grupy je konečně dimenziální.

Dk: Necht' (g, V) je ired. repr. G (konečné) a $x \in V$. Pak $\{g(g)x \text{ pro } \forall g \in G\}$ je konečná množina vektorů, jejíž lin. obal je konečně rozm. podprostor V , který je ale navíc invariantní vůči g a tedy celý V musí být tento podprostor, protože g je ireducibilní dle předpokladu. $\Rightarrow V$ je konečně-rozměrný.

Pr. Uvažujme působení $SO(2)$ na $\mathbb{R}^3 = V$, přidáme $\forall g \in SO(2)$ přiřadíme rotaci R_φ^z kolem osy z



- vidíme, že se při všech těchto rotacích nemění $\vec{r} = z e_z$
a vektory $\vec{r} = x e_x + y e_y$ jsou opět lin. kombinací e_x a e_y

$\Rightarrow$ podprostory $W_1 = \mathbb{L}(\{e_x, e_y\})$
 $W_2 = \mathbb{L}(\{e_z\})$ jsou invariantní

při to-to působení $SO(2)$ a jde tedy o reducibilní reprezentaci $SO(2)$

- pokud se omezíme na W_1 a W_2 , už nenajdeme další netriviální inv. podpr.
 $\rightarrow$ podrepr. na W_1 a W_2 už jsou ireducibilní

- matice

$$R_\varphi^z = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow R_\varphi^z|_{W_1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \leftarrow \text{ireducibilní reálná repr. } SO(2)$$
$$\rightarrow R_\varphi^z|_{W_2} = (1)$$

- uvidíme později, že všechny ired. repr. Abelových grup na ko-plexních prostorech jsou nutně jednodimenziální, zde však máme reálnou repr.

$\rightarrow$ pokud bychom např. uvažovali působení $SO(2)$ na $\mathbb{C}$ -prostor podprostoru p-orbitál Hilb. prostoru elektronů v centrální poli, který je ko-plexní, tak bychom našli další netriviální inv. podprostory
 $\Rightarrow$ přepíšeme tedy ko-plexní ko-řinice $\vec{z} = c^x e_x + c^y e_y$, kde $c^x, c^y \in \mathbb{C}$

pak $z_1 = e_x + i e_y$
a $z_2 = e_x - i e_y$ generují jednorozměrné inv. podpr. $W_1^{\mathbb{C}}$, který je pak reducibilní

neboť např. $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{-i\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$\Rightarrow R_\varphi^z|_{W_1^{\mathbb{C}}}$ lze zdiagonalizovat pomocí podobnostní transformace

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}}_{A^\dagger = A^{-1}} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}}_A = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

nové ireducibilní repr. $SO(2)$ (ko-plexní), které nejsou ekvivalentní triviální repr.
A tvoří normalizovaný vektory z_1 a z_2

- obecně lze ukázat, že $\forall \mathbb{R}$ (ko-plexní) grupy $SO(2)$ jsou $e^{\pm i n \varphi}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Úplná reducibilita

23

- v příkladu jsme viděli, že repr. $SO(2)$ na $\mathbb{R}^3$ byla tvořena dvěmi podrepr. $R_\varphi \downarrow_{W_1}$ a $R_\varphi \downarrow_{W_2}$, přičemž $W_1 \perp W_2$ a R_φ byla blokově diagonální $\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi \end{pmatrix}$ (tj. matice $D^{W_1 W_2}(s)$ z předchozího výkladu reducibility byla nulová)

$\Rightarrow$ zavádí se pojem úplné reducibility a bude nás zajímat, zda je to obecná vlastnost reducibilních reprezentací.

Def: Reprezentace (g, V) grupy G (či algebry $\mathfrak{g}$) je úplně reducibilní (též rozložitelná), pokud existuje rozklad $V = \sum_{j \in J} V_j$, kde V_j jsou ireducibilní invariantní podprostory V při působení G .

- J je obecně množina indexů, která je pro konečně rozměrné prostory konečná, tedy $J = \{1, 2, \dots, p\}$ a volbou vhodné báze

$$\underbrace{e_{11}, \dots, e_{1d_1}}_{\in V_1}, \underbrace{e_{21}, \dots, e_{2d_2}}_{\in V_2}, \dots, \underbrace{e_{p1}, \dots, e_{pd_p}}_{\in V_p}$$

dostaneme maticovou reprezentaci ve tvaru $D(s) = \begin{pmatrix} D^1(s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^2(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D^p(s) \end{pmatrix}$
tj. $D(s) = D^1(s) \oplus D^2(s) \oplus \dots \oplus D^p(s)$
kde $D^1(s), \dots, D^p(s)$ jsou již ireducibilní matic. repr.

(Ve fyzikálních aplikacích se často používá značení $\Gamma = \underbrace{\Gamma^1 \oplus \dots \oplus \Gamma^p}_{\text{ireducibilní repr. grupy } G}$)

Pro maticové reprezentace $D(s)$ grupy G lze opět ~~to~~ definovat úplnou reducibilitu tak, že musí existovat matice A , že $D'(s) = A D(s) A^{-1}$, kde $D(s)$ je v blokově diag. tvaru

- Kdy je reducibilní repr. úplně reducibilní?

- obecně ne vždy: uvažujme $G = (R^+, +)$ a její dvourozm. repr. $D(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\left[\text{Jde o repr., neboť } D(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } D(x)D(y) = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D(x+y) \right]$

$\nexists$ vektory $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ tvoří ired. inv. podprostor, avšak vektory $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$, které jsou kolmé na $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, netvoří inv. podprostor, neboť

$$D(x) \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow D(x) \text{ je reducibilní}$$

avšak není úplně reducibilní, protože neexistuje matice S taková, aby $D'(y) = S \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} f(y) & 0 \\ 0 & g(y) \end{pmatrix}$, kde $f(y), g(y)$ jsou nějaké fce y
protože by muselo být $\det D(y) = \det D'(y) \Rightarrow 1 = f(y)g(y)$
 $\text{Tr } D(y) = \text{Tr } D'(y) \Rightarrow 2 = f(y) + g(y)$

a tedy $f(y) = g(y) = 1$, což nelze, repr. $D(x)$ není ekvivalentní triviální repr.

- ukazuje se, že významné jsou tzv. unitární repr., které jsou důležité pro aplikaci ve fyzice a pro které reducibilita již znamená úplnou reducibilitu

Def. Unitární reprezentace grupy G je repr. na vektor. prostoru $\mathcal{H}$ se skalárním součinem $\langle \psi | \varphi \rangle$ (budeme držet obvyklého fyzikálního značení $\mathcal{H}$ - Hilbertův prostor)

přičemž $\forall g \in G$ je reprezentován unitárním operátorem $U(g)$ pro který platí $U(g)U(g)^\dagger = U(g)^\dagger U(g) = 1$ (kde $U(g)^\dagger$ je hermitovsky sdruž. op.) neboli platí $\langle U(g)\psi | U(g)\varphi \rangle = \langle \psi | \varphi \rangle$ pro $\forall g \in G$ a $\forall |\psi\rangle, |\varphi\rangle \in \mathcal{H}$

(pro ∞ -rozměrné $\mathcal{H}$ se navíc požaduje omezenost $U(g)$: $\|U(g)\psi\| \leq M\|\psi\|$ pro $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}$)

Maticová unitární repr. je matic. repr. $D(g)$, kde $\forall$ matice jsou unitární, tj. $D(g)^{-1} = D(g)^\dagger$

Věta: Každá konečně-rozměrná unitární reducibilní repr. grupy G na $\mathcal{H}$ je úplně reducibilní.

Dk: Necht' $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ je netriviální inv. podprostor při působení G (je takový, neboť jde o reducibilní repr.). Stačí ukázat, že $\mathcal{H}_1^\perp$ (ortogon. doplněk $\mathcal{H}_1$ v $\mathcal{H}$) je invariantní podpr. To je ale přímým důsledkem invariance skalárního součinu při působení G v $\mathcal{H}$ (jde o unit. repr.), neboť je-li $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1^\perp$, tj. $\langle \psi | \varphi \rangle = 0$ pro $\forall \varphi \in \mathcal{H}_1$, pak $\langle U(g)\psi | \varphi \rangle = \langle \psi | U(g)^\dagger \varphi \rangle = \langle \psi | \varphi \rangle = 0$ (pro $\varphi \in \mathcal{H}_1$ díky invarianci $\mathcal{H}_1$)

a tedy $\mathcal{H}_1^\perp$ je také invariantní podpr., protože $U(g)\psi \in \mathcal{H}_1^\perp$ pro $\forall g \in G$.

Pokud $\mathcal{H}_1$, či $\mathcal{H}_1^\perp$ jsou stále reducibilní, pokračujeme v rozkládání.

- na příkladu reduc. repr., která není úplně reduc., jsme viděli, že šlo o neunitární repr. a ani tuto repr. není možné převést podobnostní transf. na unit. (kdyby to šlo, byla by úplně reduc.)

- otázkou je, kdy je neunit. repr. ekvivalentní nějaké unit. repr. a tedy úplně reduc. repr. ukazuje se, že tomu tak je vždy pro jisté třídy grup, a to především pro konečné a tzv. kompaktní Lieovy grupy (těm se budeme blíže zabývat později)

Věta: Každá konečně-rozměrná reducibilní repr. konečné (kompaktní Lieovy) grupy je již nutně úplně reducibilní (Maschkeův teorém)

Dk: Základní myšlenka: Necht' $T(s)$ není unit. věci $\langle 1 \rangle \in \mathcal{H}$, pak zkonstruujeme nový skal. součin $\langle \varphi | \psi \rangle' = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \langle T(g)\varphi | T(g)\psi \rangle$, věci nemůžeme už $T(s)$ je unitární. (díky větě o přeuspořádání) a který je ekvivalentní s původním $\langle 1 \rangle$. (u Lieových grup nutná integrace přes celou grupu $\Rightarrow$ kompaktnost, aby byl integrál konečný)