

Schurava lemmata

(25)

- někdy se uvádí pouze jedno, druhé je důsledek - pro komplexní konečně-rozměrné reprezentace
- jsou platná nejen pro reprezentace grup, ale též pro repr. Lieových algeber

1. Lemma

Nechť (ρ_1, V_1) a (ρ_2, V_2) jsou ireducibilní reprezentace grupy G .

Nechť S je splétající operátor mezi těmito reprezentacemi, tj.

$$S: V_1 \rightarrow V_2, \quad S\rho_1(g)\vec{v}_1 = \rho_2(g)S\vec{v}_1 \quad \text{pro } \forall g \in G$$

Pak je buď $S=0$ (nulové zobrazení, $S\vec{v}=0$ pro $\forall \vec{v} \in V_1$)

nebo je S izomorfismus a tedy ρ_1 a ρ_2 jsou ekvivalentní repr.

Důkaz: • Jádro $\text{Ker } S$ a obraz $\text{Im } S$ jsou invariantní podprostory při působení G díky tomu, že jde o splétající operátor, neboť

a) je-li $\vec{v} \in \text{Ker } S$ (tj. $S\vec{v}=0$), pak $S\rho_1(g)\vec{v} = \rho_2(g)S\vec{v} = 0$, a tedy
 $\rho_1(g)\vec{v} \in \text{Ker } S$ pro $\forall g \in G$

b) je-li $\vec{w} \in \text{Im } S$, pak $\exists \vec{v} \in V_1: S\vec{v} = \vec{w}$

a tedy $\rho_2(g)\vec{w} = \rho_2(g)S\vec{v} = S\rho_1(g)\vec{v} = S\vec{v}'$, kde $\vec{v}' \in V_1$,

$$\Rightarrow \rho_2(g)\vec{w} \in \text{Im } S \quad \text{pro } \forall g \in G$$

- Protože V_1 a V_2 jsou ireducibilní $\Rightarrow \text{Ker } S = 0$ nebo $\text{Ker } S = V_1$
a dále $\text{Im } S = 0$ nebo $\text{Im } S = V_2$

Pokud $\text{Im } S = 0 \Rightarrow S = 0$.

Pokud $\text{Ker } S = V_1 \Rightarrow S = 0$.

Pokud $\text{Ker } S = 0$ a $\text{Im } S = V_2$, pak S je izomorfismus a
tedy $(\rho_1, V_1) \simeq (\rho_2, V_2)$ (jsou ekvivalentní).

2. Lemma: Necht' (ρ, V) je ireducibilní komplexní konečně-rozměrná repr. grupy G a S je splétající operátor na V , tj. $S: V \rightarrow V$, který komutuje se všemi $\rho(g)$, $g \in G$.

Pak $S = \lambda I$, kde $\lambda \in \mathbb{C}$, tj. S je násobkem identity.

Důkaz: Necht' $A = S - \lambda I$, kde λ je řešení $\det(S - \lambda I) = 0$ (proto potřebujeme komplexní repr a $\dim < \infty$)
pak A je též splétající, ale není invertibilní
 $\Rightarrow$ z 1. lemmatu plyne, že $A = 0$, a tedy $S = \lambda I$.

Důsledky Schurových lemmat

26

- 1) Kritérium ireducibility konečně-rozm. repr. konečných (a komp. Lieových) grup
- pro tyto grupy je každá konečně-rozm. repr. úplně reducibilní nebo ireduc,
pokud je reducibilní, pak každá matice lze převést na tvar $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ a komutuje
s maticemi $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, kde $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow$ Pokud je jedinou maticí,
která komutuje se všemi maticemi dané repr., násoben jednotkovou maticí,
pak jde nutně o ireducibilní reprezentaci.

- 2) Komplexní konečně-rozm. ireduc. repr. komutativní (abelovské) grupy G
jsou jednorozměrné

Dk: Necht' $T(g)$ tvoří repr. abelovské grupy G na prostoru V .

Pak $T(g_1)T(g_2) = T(g_2)T(g_1)$ pro $\forall g_1, g_2 \in G$

$\Rightarrow T(g_1)$ komutuje se $\forall T(g_2)$ a tedy jde-li o ireduc. repr.,
pak dle 2. Schor. lemmatu je $T(g_1) = \lambda(g_1) \mathbb{I}$ pro $\forall g_1 \in G$

$\Rightarrow T(g)$ je reducibilní, ledaže $\dim V = 1$.

Pozn. požadavek komplexnosti je důležitý, jak jsme viděli v př. působení $SO(2)$ na $\mathbb{R}^3$

- 3) Relace ortogonalit pro maticové ireducibilní komplexní repr.

Neht' $D^\mu(g)$ a $D^\nu(g)$ jsou dvě komplexní ireduc. matic. repr.

konečné (resp. kompaktní Lieovy) grupy. Pak

1) pokud jsou tyto repr. neekvivalentní, pak

$$\sum_{g \in G} D_{ij}^\mu(g^{-1}) D_{ke}^\nu(g) = 0 \quad (\text{resp. } \int_G D_{ij}^\mu(\bar{g}^{-1}) D_{ke}^\nu(g) dg = 0)$$

levoinvariantní míra na G

2) pokud jsou ekvivalentní, pak $\exists S$ taková, že $D^\mu(g) = S^{-1} D^\nu(g) S$

a platí

$$\sum_{g \in G} D_{ij}^\mu(\bar{g}^{-1}) D_{ke}^\nu(g) = \frac{\#G}{d_\mu} S_{kj} (S^{-1})_{ie} \quad \left(\text{resp. obdobně pro komp. Lieovy grupy, } \Sigma \leftrightarrow \int \text{ a } \#G \leftrightarrow V_G \right)$$

a speciálně pro $\mu = \nu$ máme $S = \mathbb{I}$

$$\text{a tedy } \sum_{g \in G} D_{ij}^\mu(\bar{g}^{-1}) D_{ke}^\nu(g) = \frac{\#G}{d_\mu} \delta_{kj} \delta_{ie} \delta_{\mu\nu}$$

3) pokud jsou tyto repr. unitární, pak $D_{ij}^\mu(\bar{g}^{-1}) = D_{ji}^{\mu*}(g)$

a dostaneme pro neekvivalentní, nebo identické ireduc. repr. vztah

$$\boxed{\sum_{g \in G} D_{ji}^\mu(g)^* D_{ke}^\nu(g) = \frac{\#G}{d_\mu} \delta_{\mu\nu} \delta_{jk} \delta_{ie}}$$

Dk. Relace ortogonalitý pro konečné grupy (u kompaktních Lieových grup) (27)

Necht B je libovolná matice $d_\mu \times d_\nu$ je pouze nutné použít levoinv. integraci
kde d_μ , resp. d_ν jsou dimenze ired. repr. místo sumy přes $\#$ prvky grupy)

Pak matice $A = \sum_g D^\mu(g^{-1}) B D^\nu(g)$ splňuje $D^\mu(h) A = A D^\nu(h)$ pro $\forall h \in G$

neboť

$$D^\mu(h) A = \sum_g D^\mu(h) D^\mu(g^{-1}) B D^\nu(g) = \sum_{g'} D^\mu(g'^{-1}) B D^\nu(g'h) = A D^\nu(h)$$

substituce $g'^{-1} = h g^{-1}$, neboli $g = g'h$

a využití věty o přeuspořádání (při násobení jednot-
prvkem $h \in G$ všechny prvky grupy G dostaneme opět
všechny prvky grupy)

Dále

1) pokud D^μ není ekvivalentní D^ν , pak dle 1. Schurova lemmatu musí být

$A = 0$ a vezmeme-li jako B matici, jejíž jediný nenulový prvek je $b_{rs} = 1$,

pak

$$0 = \sum_{j,k} \sum_g D^\mu_{ij}(g^{-1}) \underset{\delta_{jr} \delta_{ks}}{B_{jk}} D^\nu_{ke}(g) = \sum_g D^\mu_{ir}(g^{-1}) D^\nu_{se}(g) = 0$$

2) pokud $D^\mu = \bar{S}^\dagger D^\nu S$ (tj. D^μ a D^ν jsou ekvivalentní), pak

$$D^\mu(h) A = A S D^\nu(h) \bar{S}^\dagger, \text{ neboli } D^\mu(h) A S = A S D^\nu(h) \text{ pro } \forall h \in G$$

a tedy dle 2. Schurova lemmatu $A S = \lambda I$, neboli $A = \lambda \bar{S}^\dagger$

Hodnotu λ určíme pomocí stopy výrazu $\lambda I = A S = \sum_g D^\mu(g^{-1}) B S D^\nu(g) \bar{S}^\dagger S$,

dostaneme

$$d_\mu \lambda = \text{Tr } \lambda I = \sum_g \text{Tr} [D^\mu(g^{-1}) B S D^\nu(g)] = \sum_g \text{Tr } B S = \#G \sum_{ij} B_{ij} S_{ji}$$

a opět volbou $B_{ij} = \delta_{ir} \delta_{js}$ nakonec $d_\mu \lambda = \#G S_{sr}$

a tedy nakonec

$$\lambda (\bar{S}^\dagger)_{ie} = A_{ie} = \sum_{j,k} \sum_g D^\mu_{ij}(g^{-1}) \underset{\delta_{jr} \delta_{ks}}{B_{jk}} D^\nu_{ke}(g) = \sum_g D^\mu_{ir}(g^{-1}) D^\nu_{se}(g) = \frac{\#G}{d_\mu} S_{sr} (\bar{S}^\dagger)_{ie}$$

což jsme měli dokázat.

Další vztahy jsou již přímocare' dosazení

• Co je vlastně v relacích ortogonalitý na sebe ortogonální?

Pokud bychom našli maticové vyjádření všech neekvivalentních ired. repr.

dané grupy a sestavili vektory typu $(D^\mu_{ij}(g_1), D^\mu_{ij}(g_2), \dots, D^\mu_{ij}(g_{\#G}))$

byly by právě tyto vekt. na sebe kolmé, tj. každý vektor je určen
třemi parametry (μ - číslo je repr., i, j - určují pozici prvku matice D^μ)

a složky těchto vektorů jsou číslovány prvky grupy. Jde tedy o $\#G$ -rozměrný
prostor, kde máme $\sum_\mu d_\mu^2$ ortogonálních vektorů, musí tedy být $\sum_\mu d_\mu^2 \leq \#G$
a suma přes $\#$ nekv. ired. repr. (později si ukážeme, že platí=)

Irreducibilní reprezentace cyklických grup

- pokud je grupa generována jediným prvkem $g \in G$, pro který platí $g^n = e$ (např. v C_n jde o prvek $C_n = R_z(\frac{2\pi}{n})$), pak všechny $\mathbb{R}$ musí být jednorozměrné (komutativní grupa) komplexní
tj. $D^\mu(g)$ jsou čísla splňující $D^\mu(g)^n = 1 = D^\mu(e)$ pro $\forall \mu$ a protože ostatní prvky G jsou násobky g , budou ostatní prvky reprezentovány násobky $D^\mu(g)$

- dostáváme tak n různých komplexních $\mathbb{R}$, pro každý kořen $z^n = 1$ jednu. Označíme-li $\varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, pak

C_n	e	g	g^2	$\dots$	g^{n-1}
$\Pi^1 = A$	1	1	1	$\dots$	1
Π^2	1	ε	ε^2	$\dots$	$\varepsilon^{n-1} = \varepsilon^*$
Π^3	1	ε^2	ε^4	$\dots$	$\varepsilon^{2(n-1)} = (\varepsilon^*)^2$
$\vdots$					
Π^{n-1}	1	ε^{n-2}	$\varepsilon^{2(n-2)}$	$\dots$	$\varepsilon^{(n-1)(n-1)} = (\varepsilon^*)^{n-1} = \varepsilon$
Π^n	1	$\varepsilon^{n-1} = \varepsilon^*$	$\varepsilon^{2(n-1)} = (\varepsilon^*)^2$	$\dots$	$\varepsilon^{(n-1)(n-1)} = (\varepsilon^*)^{n-1} = \varepsilon$

$(*) \left\{ \begin{matrix} \Pi^1 \\ \Pi^2 \\ \Pi^3 \\ \vdots \\ \Pi^{n-1} \\ \Pi^n \end{matrix} \right\} E_2 E_1$

$\left. \begin{matrix} \leftarrow \text{totálně symetrická } \mathbb{R} \\ \text{ortogonální řádky} \\ \text{a také sloupce} \end{matrix} \right\}$

- (*) pro n liché bude $\frac{n-1}{2}$ dvojic $\mathbb{R}$, které budou tvořit 2-rozm. reálné $\mathbb{R}$
pro n sudé bude $\frac{n-2}{2}$ dvojic a navíc ještě jedna antisymetrická $\mathbb{R}$ gener. $D(g) = -1$, kdy $D(g^{2k}) = 1$ a $D(g^{2k+1}) = -1$
která se obvykle značí ubod. grup B

• speciálně pro C_4

C_4	E	C_4	C_2	C_4^3
A	1	1	1	1
B	1	-1	1	-1
E	$\begin{Bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} i & -1 \\ -i & 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -1 & -i \\ 1 & i \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{Bmatrix}$

- oršlem pro komutativní 4-grupu ~ např. $C_{2v} = \{E, C_2, \sigma_v, \sigma_v'\}$ musí platit $D^\mu(g)^2 = 1$ pro všechny $g \in C_{2v}$, neboli $D^\mu(g) = \pm 1$

$E \mid C_2 \sigma_v \sigma_v'$
 $C_2 \mid E \sigma_v' \sigma_v$
 $\sigma_v \mid \sigma_v' E C_2$
 $\sigma_v' \mid \sigma_v C_2 E$

opět pouze 4 možnosti
 $\Rightarrow 4$ jednoroz. $\mathbb{R}$

C_{2v}	E	C_2	σ_v	σ_v'
A_1	1	1	1	1
A_2	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	-1	1

$\left. \begin{matrix} \leftarrow \text{nebot } D(\sigma_v') = D(C_2)D(\sigma_v) \\ \text{opět ortogonální} \\ \text{řádky i sloupce} \end{matrix} \right\}$

Charakter reprezentace

- protože mnoho reprezentací je ekvivalentních (především u maticových reprezentací, které dostáváme volbou různých bází), je vhodné mít nějakou „charakteristiku“ těchto tříd ekvivalentních reprezentací

- zavádí se pojem charakter reprezentace

pomocí stopy matic, které vyjadřují v určité bázi konečně-rozměrnou repr. grupy G na prostoru V

$$\boxed{\chi(g) = \text{Tr } D(g)} = \sum_{i=1}^d D_{ii}(g) \quad d = \dim V$$

- $\chi(g)$ se nazývá charakter prvku $g \in G$ v reprezentaci $D(g)$ (nebo obecně $(g, V) \leftrightarrow D(g)$)

- díky cykličnosti stopy matic, mají ekvivalentní reprezentace stejný charakter, a tedy definice nezávisí na volbě báze
pro $D'(g) = \bar{A}' D(g) A$ máme

$$\chi(g) = \text{Tr } D'(g) = \text{Tr } (\bar{A}' D(g) A) = \text{Tr } D(g) = \chi(g)$$

- pozor: stejný charakter dvou reprezentací ještě neznamena ekvivalenci těchto repr.

(poté, co uvidíme, že to platí pro repr. konečných a kompaktních Lieových grup)

Př. $G = (\mathbb{R}, +)$, repr. $D(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ má stejný charakter jako triviální repr. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ale nejsou ekvivalentní

- vlastnosti:

$$1) \text{ pro } g=e \text{ máme } D(e) = \mathbb{1}_{d \times d} \Rightarrow \boxed{\chi(e) = d = \dim V}$$

- 2) charaktery sdružených prvků jsou stejné, pro $g_2 \sim g_1$

$$\text{bude } \text{Tr } D(g_2) = \text{Tr } D(h^{-1} g_1 h) \xrightarrow{\text{cykličnost stopy}} \text{Tr } D(g_1) = \chi(g_1)$$

$\Rightarrow$ tabelují se pouze charaktery tříd sdružených prvků

- 3) je-li $D(g) = D_1(g) \oplus D_2(g) \oplus \dots \oplus D_r(g)$, pak $\chi(g) = \sum_{i=1}^r \chi_i(g)$
(rozklad úplně reduc. repr.)

Relace ortogonality pro charaktery konečných grup

(30)

- necht' $\chi^\mu(g)$ a $\chi^\nu(g)$ jsou charaktery dvou ireducibilních reprezentací na komplexních konečně-rozměrných prostorech pro grupu G a necht' jsou neekvivalentní, pokud $\mu \neq \nu$, pak z relací ortogonality

$$\sum_{g \in G} D_{ij}^\mu(\bar{g}^{-1}) D_{kl}^\nu(g) = \frac{\#G}{d_\mu} \delta_{kj} \delta_{il} \delta_{\mu\nu}$$

dostaneme položením $i=j$ a $k=l$ a součtem přes i a k

$$\begin{aligned} \sum_{i,k} \sum_{g \in G} D_{ii}^\mu(\bar{g}^{-1}) D_{kk}^\nu(g) &= \sum_{g \in G} \chi^\mu(\bar{g}^{-1}) \chi^\nu(g) = \\ &= \sum_{i,k} \frac{\#G}{d_\mu} \delta_{ki} \delta_{ik} \delta_{\mu\nu} = \frac{\#G}{d_\mu} \sum_i \delta_{ii} \delta_{\mu\nu} = \#G \delta_{\mu\nu} \end{aligned}$$

a protože je pro konečnou grupu každá reprezentace ekvivalentní nějaké unitární repr., platí

$$\chi(\bar{g}^{-1}) = \text{Tr } D(\bar{g}^{-1}) = \text{Tr } \underbrace{A D^\nu(\bar{g}^{-1}) A^{-1}}_{\text{unitární}} = \text{Tr } D^\nu(g)^\dagger = \chi^\nu(g)^* = \chi(g)^*$$

a tedy

$$\boxed{\sum \chi^\mu(g)^* \chi^\nu(g) = \#G \delta_{\mu\nu}}$$

(obdobně pro kompaktní Lieovy grupy: $\int_G \chi^\mu(g)^* \chi^\nu(g) d\mu(g) = V_G \delta_{\mu\nu}$)

- protože pro třídy sdružených prvků C_k , $k=1, \dots, N_c$ jsou vždy charaktery stejné, $\chi(C_k) = \chi(g)$ pro lib. $g \in C_k$ můžeme též psát

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N_c} n_k \chi^\mu(C_k)^* \chi^\nu(C_k) = \#G \delta_{\mu\nu}}$$

kde $n_k = \#C_k$ je počet prvků grupy G ve třídě C_k

$\Rightarrow$ charaktery neekvivalentních IR tvoří ortogonální systém vektorů v N_c -rozměrném vektorovém prostoru, a tedy $\# \text{neekvivalentních IR} \leq N_c$
(později ukážeme =)

Rozklad reducibilních reprezentací na ireducibilní

(31)

- pro konečné grupy (a kompaktní LG) je každá konečně-rozměrná repr. úplně reducibilní a ve vhodné bázi bude

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^1(g) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D^1(g) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D^{N_r}(g) \end{pmatrix}$$

$\left. \begin{matrix} D^1(g) \\ \vdots \\ D^1(g) \end{matrix} \right\} \alpha_1$ $\left. \begin{matrix} D^2(g) \\ \vdots \\ D^2(g) \end{matrix} \right\} \alpha_2$ $\left. \begin{matrix} D^{N_r}(g) \\ \vdots \\ D^{N_r}(g) \end{matrix} \right\} \alpha_{N_r}$

podreprezentace na invariantních ireducibilních podprostorech už musí být ekvivalentní IR dané grupy

kde α_m značí, kolikrát je v repr. $D(g)$ obsažena IR $D^m(g)$
 $N_r \leftarrow$ počet IR (neekvivalentních)

a dostáváme

$$\chi(g) = \sum_{m=1}^{N_r} \alpha_m \chi^m(g)$$

a pomocí relací ortogonalit dostaneme

$$\sum_{g \in G} \chi^v(g)^* \chi(g) = \sum_{m=1}^{N_r} \alpha_m \sum_{g \in G} \chi^v(g)^* \chi^m(g) = \alpha_v \#G$$

a tedy

$$\alpha_m = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi^m(g)^* \chi(g) = \frac{1}{\#G} \sum_{k=1}^{N_c} n_k \chi^m(c_k)^* \chi(c_k)$$

- stačí tedy znát charaktery tříd sdružených prvků

- α_m může být nulové, pokud v dané reduc. repr.

není repr. $D^m(g)$ obsažena

- rozklad reduc. repr. na IR je jednoznačný (až na přeuspořádání)

Frobeniovo kritérium ireducibility

- spočítáme
$$\sum_{g \in G} \chi(g)^* \chi(g) = \sum_{g \in G} \sum_{m,v} \alpha_m \alpha_v \chi^m(g)^* \chi^v(g) = \#G \sum_m \alpha_m^2$$

- pokud je $D(g)$ ireducibilní, pak $\chi(g) = 1 \cdot \chi^m(g)$ ($\alpha_m = 1$)
 pro určité m ($\alpha_v = 0, v \neq m$)

a tedy
$$\sum_m \alpha_m^2 = 1$$

ovšem pro reducibilní repr. budou alespoň dvě α_m nenulové

a tedy
$$\sum_m \alpha_m^2 > 1,$$

- dostáváme

$$\sum_{g \in G} \chi(g)^* \chi(g) = \#G \Leftrightarrow D(g) \text{ je ireducibilní}$$

Ekvivalence reprezentací, právě když mají stejný charakter
pro konečné a ko-compactní Lieovy grupy

(32)

Dk: $\Rightarrow$ triviální (viz výše)

$\Leftarrow$ Necht' $\chi(g)$ a $\chi'(g)$ jsou charaktery dvou repr.

a necht' $\chi(g) = \chi'(g)$, pak

1) pokud jsou ireducibilní a nebyly by ekvivalentní,
pak by platilo

$$\sum_{g \in G} \chi'(g)^* \chi(g) = 0, \text{ ale zároveň } \sum_{g \in G} \chi(g)^* \chi(g) = \#G$$

což je spor pro $\chi(g) = \chi'(g)$

2) pokud jsou reducibilní, pak jsou úplně reducibilní,
a dostaneme pro $\forall g \in G$ z rovnosti $\chi(g)$ a $\chi'(g)$

$$\left. \begin{aligned} \chi(g) &= \sum_{n=1}^{N_r} \alpha_n \chi^n(g) \\ \chi'(g) &= \sum_{n=1}^{N_r} \alpha'_n \chi^n(g) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{N_r} (\alpha_n - \alpha'_n) \chi^n(g) = 0$$

a pomocí relací ortogonalit

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=1}^{N_r} (\alpha_n - \alpha'_n) \sum_{g \in G} \chi^n(g)^* \chi^n(g) = \#G \sum_{n=1}^{N_r} (\alpha_n - \alpha'_n) \delta_{nv} = \\ &= \#G (\alpha_v - \alpha'_v) \end{aligned}$$

a tedy $\alpha_v = \alpha'_v$

- oba rozklady obsahují stejné IR (až na ekvivalenci)

a jsou tedy ekvivalentní