

Vztah reprezentací grup a jejich podgrup

(65)

1) od grupy G k její podgrupě H - subdukce (subdukované repr.)

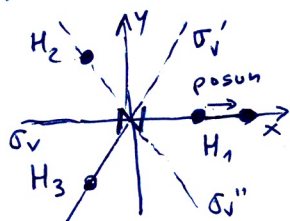
- omezíme-li se v jisté reprezentaci Γ grupy G pouze na prvky její podgroupy H, dostaneme opět reprezentaci, které se říká subdukovaná repr. $\Gamma \downarrow H$ z grupy G na podgrupu H
- pokud bude Γ některou z IR grupy G, např. Γ_G^M s charakterem $\chi_G^M(g)$, pak $\Gamma_G^M \downarrow H$ bude obecně reducibilní reprezentace s charakterem $\chi_H^{M \downarrow H}(h) = \chi_G^M(h)$ pro $\forall h \in H$ a můžeme ji rozložit na IR podgroupy H pomocí

$$\alpha_{\nu}^{M \downarrow H} = \frac{1}{\#H} \sum_{h \in H} \chi_H^{\nu}(h)^* \chi_G^M(h)$$

kde $\alpha_{\nu}^{M \downarrow H}$ vyjadřuje, kolikrát se IR Γ_H^{ν} vyskytuje v subdukované repr. z IR Γ_G^M grupy G.

Příklady: a) subdukce z C_{3v} na podgrupu $H = \{E, \sigma_v\} \sim C_s$

pohled shora



při narušení symetrie tím, že prodloužíme jednu vazbu N-H v molekule NH_3 (σ_v je stále symetrií)

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
E	2	-1	0

$H \sim C_s$	E	σ_v
A'	1	1
A''	1	-1

charaktery IR podgroupy H

$$A' = A_1 \downarrow H$$

$$A'' = A_2 \downarrow H$$

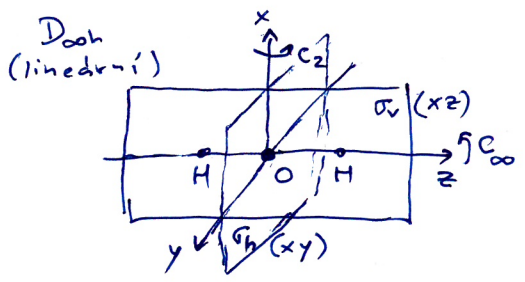
$$A' \oplus A'' = E \downarrow H$$

charaktery subdukované repr. z IR grupy C_{3v}

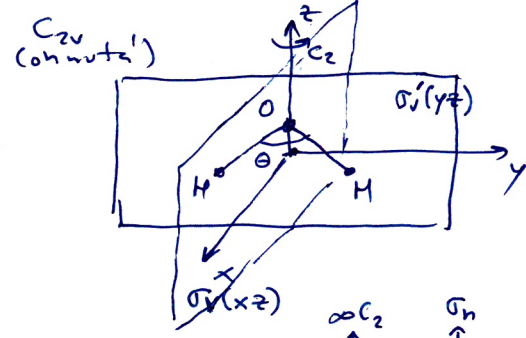
↑
neboť $\alpha_{A'}^{E \downarrow H} = \frac{1}{2} (1 \cdot 2 + 1 \cdot 0) = 1$ apod.

- vidíme tedy, že se při narušení symetrie rozštěpí dvojnásobně degenerovaná hladina příslušející IR E grupy C_{3v} na nedegenerované hladiny příslušející IR A' a A'' podgroupy H

b) subdukce z $D_{\infty h}$ (lineární geometrie) na C_{2v} (ohnutá geom.) pro H_2O^-
 - je nutné dát pozor na orientaci souřadného systému
 - obvyklá orientace - osa z je hlavní rotační osou symetrie



vs.



- standardní tabulky charakterů

$D_{\infty h}$	E	$2C_{\infty}^{\phi}(\phi) \dots C_2(z)$	$\infty \sigma_v$	$\sigma_h(xy)$	$2S_{\infty}^{\psi}(\psi) \dots i$	∞C_2
Σ_g^+	1	1 ... 1	1	1	1 ... 1	1
$R_z \rightarrow \Sigma_g^-$	1	1 ... 1	-1	1	1 ... 1	-1
$(R_x, R_y) \rightarrow \Pi_g$	2	$2\cos\phi \dots -2$	0	-2	$-2\cos\phi \dots 2$	0
Δ_g	2	$2\cos 2\phi \dots 2$	0	2	$2\cos 2\phi \dots -2$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$z \rightarrow \Sigma_u^+$	1	1 ... 1	1	-1	-1 ... -1	-1
Σ_u^-	1	1 ... 1	-1	1	1 ... 1	-1
$(x, y) \rightarrow \Pi_u$	2	$2\cos\phi \dots -2$	0	2	$2\cos\phi \dots -2$	0
Δ_u	2	$2\cos 2\phi \dots 2$	0	-2	$-2\cos 2\phi \dots 2$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

C_{2v}	E	$C_2(z)$	$\sigma_v(xz)$	$\sigma_v'(yz)$	
A_1	1	1	1	1	z
A_2	1	1	-1	-1	R_z
B_1	1	-1	1	-1	x, R_y
B_2	1	-1	-1	1	y, R_x

$\Sigma_g^- \downarrow C_{2v}$	1	-1	1	-1	$= B_1$
$\Pi_g \downarrow C_{2v}$	2	0	-2	0	$= A_2 \oplus B_2$
$\Sigma_u^+ \downarrow C_{2v}$	1	-1	-1	1	$= B_2$
$\Pi_u \downarrow C_{2v}$	2	0	2	0	$= A_1 \oplus B_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

- pozor: přiřazení x, y, z a R_x, R_y, R_z do IR grup $D_{\infty h}$ a C_{2v}

je závažnější, neplatí např. že by se Π_u rozložilo na B_1 a B_2
 (x,y) x y

- je nutné použít korespondenci

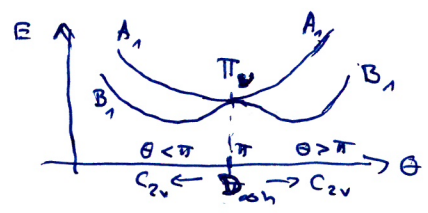
$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} x(D_{\infty h}) &\leftrightarrow z(C_{2v}) \\ y &\leftrightarrow x \\ z &\leftrightarrow y \\ R_x &\leftrightarrow R_z \\ R_y &\leftrightarrow R_x \\ R_z &\leftrightarrow R_y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \Pi_u &= A_1 \oplus B_1 \\ \Sigma_u^+ &= B_2 \\ \Pi_g &= A_2 \oplus B_2 \\ \Sigma_g^- &= B_1 \end{aligned} \\
 & \text{přesněji: } \Pi_u \downarrow C_{2v} = A_1 \oplus B_1 \text{ atd.}
 \end{aligned}$$

což souhlasí s rozklady charakterů subdukovaných

repr. $\Sigma_g^- \downarrow C_{2v}, \Pi_g \downarrow C_{2v}$ atd. výše v tabulce, použijeme-li

korespondenci $E \leftrightarrow E, \infty C_2 \leftrightarrow C_2, \sigma_h \leftrightarrow \sigma_v, \infty \sigma_v \leftrightarrow \sigma_v'$

- dochází tedy k rozštěpení degenerovaných hladin



2) Indukované reprezentace pro konečné grupy aneb od podgrupy ke grupě (67)

- mějme grupu G a její podgrupu H , G lze tedy rozložit na levé třídy $G = g_1 H + g_2 H + \dots + g_M H$, kde g_i lze volit libovolně z daných tříd,

avšak položíme $g_1 = e$ (tedy první třída je H)

index podgrupy H v G je $M = \frac{\#G}{\#H}$

- necht' $D_H(h)$ je lib. maticová repr. podgrupy H a necht' $\phi_1, \dots, \phi_d$ je báze této reprezentace (která je tedy d -rozměrná) - jde o bázi určitého invariantního ireduc. podprostoru při působení H , ne však obecně při působení G

tj.
$$T(h)\phi_i = \sum_j \phi_j D_H(h)_{ji} \quad \text{pro } h \in H$$

- definujeme formálně (tj. nebudeme zkoumat konkrétní případ, předpokládáme, že takto dostaneme lineárně nezávislé fce)

$$\phi_{ti} = T(g_t)\phi_i, \quad \text{kde } g_t \text{ definují levé třídy } H \text{ v } G, \quad t=1, \dots, M, \quad i=1, \dots, d$$

ukážeme, že tyto fce tvoří bázi Md -rozměrné repr. grupy G , tj. že platí

$$T(g)\phi_{ti} = \sum_{sj} \phi_{sj} D_G(g)_{sj,ti}$$

- působením g postupně dostáváme

$$\begin{aligned} T(g)\phi_{ti} &= T(gg_t)\phi_i = T(g_s)T(g_s^{-1}g g_t)\phi_i = \text{neboť } g g_t \text{ určitě nleží} \\ &= T(g_s) \sum_j \phi_j D_H(g_s^{-1}g g_t)_{ji} \quad \text{do nějaké levé třídy, řekněme} \\ &= \sum_j \phi_{sj} D_H(g_s^{-1}g g_t)_{ji} \quad g_s H \Rightarrow g_s^{-1}g g_t \in H \end{aligned}$$

a tedy $T(g)\phi_{ti}$ je lin. kombinací ϕ_{sj} a dokonce pouze pro takové s , pro něž platí $g g_t \in g_s H \Rightarrow$ matici $D_G(g)$ dostaneme přidáním $\delta_{st}(g) = 1$ pro $g g_t \in g_s H$
 $\searrow 0$ jindy

neboli

$$\boxed{D_G(g)_{sj,ti} = \delta_{st}(g) D_H(g_s^{-1}g g_t)_{ji}}$$

- toto je indukovaná repr. grupy G z repr. $D_H(h)$ podgrupy H , $D_G = D_H \uparrow G$

- snadno ověříme, že jde vskutku o reprezentaci grupy G

neboť 1) pro $g=e$ dostaneme $g_t = g_s \Rightarrow D_G(e) = 1_{Md \times Md}$

2) mělo by též platit $D_G(g) D_G(g') = D_G(gg')$

(68)

rozepsání - dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{rk} D_G(g)_{sj, rk} D_G(g')_{rk, ti} &= \sum_{rk} \underbrace{\delta_{sr}(g) \delta_{rt}(g')}_{\substack{\text{"pokud } ggr = gsh \text{ pro } h \in H \\ g'g_t = g_r h' \text{ pro } h' \in H}} D_H(gs^{-1}ggr)_{jk} D_H(g_r^{-1}g'g_t)_{ki} = \\ &= \delta_{st}(gg') D_H(gs^{-1}gg'g_t)_{ji} \\ &= D_G(gg')_{sj, ti} \end{aligned}$$

• pokud je $D_H(h)$ unitární, pak též $D_G(g)$ je unitární, neboť

$$\begin{aligned} [D_G(g)^{-1}]_{sj, ti} &= \delta_{st}(g') D_H(gs^{-1}g'g_t)_{ji} = \delta_{ts}(g) D_H((gs^{-1}g'g_t)^{-1})_{ji} = \\ &\stackrel{\text{unitarita } D_H}{=} \delta_{ts}(g) D_H(g_t^{-1}g'g_s)_{ij} \stackrel{g_t^{-1}g_t = g_s h \Rightarrow g'g_s = g_t h'^{-1}}{=} \delta_{ts}(g) D_H(g_t^{-1}g'g_s)_{ij}^* = D_G(g)_{ti, sj}^* = [D_G(g)^{\dagger}]_{sj, ti} \end{aligned}$$

• pro charakter indukované repr. dostaneme

$$\chi_G(g) = \sum_{sj} \delta_{ss}(g) D_H(gs^{-1}gss)_{jj} = \sum_s \delta_{ss}(g) \chi_H(gs^{-1}gss)$$

• indukovaná repr. je obecně reducibilní, i když začneme s ireducibilní repr. Γ_H^{ν} podgrupy H , dostáváme rozklad

$$\chi^{\nu \uparrow G}(g) = \sum_M a_M^{\nu \uparrow G} \chi_G^M(g)$$

↑ charakter indukované repr. z IR Γ_H^{ν} ↑ charakter IR Γ_G^M grupy G

což můžeme též vyjádřit jako

$$\chi^{\nu \uparrow G}(g) = \sum_s \delta_{ss}(g) \chi_H^{\nu}(gs^{-1}gss) = \frac{1}{\#H} \sum_{\substack{g' \in G \\ s^{-1}gs' \in H}} \chi_H^{\nu}(s^{-1}gs')$$

↑
máme dělit $\#H$, neboť tolik různých g_s bycho - mohli zvolit

bud' g není sdružené s žádným prvkem z H
pak $\chi(g) = 0$, nebo je, a pak $ggs \in gsH$

a též $ggs \in gsH$ pro $hgs \in gsH = gsH$, neboť $gs = gsh$ pro $h \in H$, tedy $gsh = gshh' = gsh$

- tedy $a_M^{\nu \uparrow G}$ ná - říká, kolikrát se IR Γ_G^M grupy G vyskytuje

v indukované repr., kterou dostaneme z IR Γ_H^{ν} podgrupy H

- $a_M^{\nu \uparrow G}$ úzce souvisí s $a_M^{\nu \uparrow H}$, které jsme měli u rozkladu

subdukované repr. podgrupy H , když

jíme startovali s IR Γ_G^M grupy G

viz Frobeniov reciproční teorém

Frobeniův reciproční teorem

(69)

- pokud jak při subdukci, tak při indukci začínáme s ireducibilními repr. G , resp. H a rozložíme-li subduk. a induk. repr. do IR H , resp. G , tj. máme

$$\chi_G^{\nu \uparrow G}(g) = \sum_M a_M^{\nu \uparrow G} \chi_G^M(g) \quad \text{a} \quad \chi_H^{\mu \downarrow H}(h) = \sum_\nu a_\nu^{\mu \downarrow H} \chi_H^\nu(h)$$

pak Frobeniův reciproční teorem říká, že

$$a_M^{\nu \uparrow G} = a_\nu^{\mu \downarrow H}$$

neboli kolikrát se IR Γ_G^M grupy G vyskytuje v rozkladu repr. $\Gamma_G^{\nu \uparrow G}$, která je indukovanou repr. grupy G z IR Γ_H^ν podgrupy H , tolikrát se vyskytuje IR Γ_H^ν v rozkladu repr. $\Gamma_H^{\mu \downarrow H}$, která je subdukovanou repr. z IR Γ_G^M grupy G .

neboť

$$\begin{aligned} a_M^{\nu \uparrow G} &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_G^M(g)^* \chi_G^{\nu \uparrow G}(g) = \frac{1}{\#G} \left(\sum_{g \in G} \chi_G^M(g)^* \cdot \frac{1}{\#H} \sum_{g' \in G} \chi_H^\nu(g'^{-1} g g') \right) = \\ &= \frac{1}{\#G} \frac{1}{\#H} \sum_{h \in H} \sum_{g' \in G} \chi_G^M(\underbrace{g' h g'^{-1}}_{\text{sdrožený prvek k } h, \text{ charakter stejný} \rightarrow \text{lze nahradit } h})^* \chi_H^\nu(h) \\ &= \frac{\sum_{g \in G} 1}{\#G} \frac{1}{\#H} \sum_{h \in H} \chi_G^M(h)^* \chi_H^\nu(h) = a_\nu^{\mu \downarrow H} = \frac{1}{\#H} \sum_{h \in H} \chi_H^\nu(h)^* \chi_G^M(h) \end{aligned}$$

substituce $h = g'^{-1} g g' \in H$
tj. $g = g' h g'^{-1}$

neboť $a_\nu^{\mu \downarrow H}$ je celé číslo, takže na poloze * nezáleží

Př. pro triviální podgrupy dostaneme

1) pokud $H=G$, je $M=1$, $g_1=e$ a tedy $D_H \uparrow G = D_H$, tedy jde o stejnou reprezentaci

2) pokud $H=\{e\}$, pak $M=\#G$, $gH=\{g\}$ a navíc H má jedinou IR, a sice triviální $D_H(e)=1$

odtud $D_G(g)_{st} = \delta_{st}(g) \rightarrow 1$ pro $g \delta e = g$
o jindy

jde tedy o regulární reprezentaci

Př. indukce, viz indukované repr. grupy $S_4 \sim T_d$ z IR grupy $S_3 \sim C_{3v}$

Pozn: Každá IR grupy G je obsažena v některé indukované repr.

$\neq$ IR podgrupy H a naopak, každá IR podgrupa H je obsažena v některé z rozkladů subduk. repr. z IR grupy G .

Neboť z každé IR podgrupy H lze vyrobit repr. grupy G a to rozložit na IR grupy $G \Rightarrow$ ~~každá~~ IR podgrupa H musí být v nějakém rozkladu IR grupy G kvůli Frobeniovu recipr. teorému

A obráceně každou IR grupy G lze rozložit na IR podgrupy H a z nich pak udělat indukované repr., které obsahují danou IR grupy G .

3) ireducibilní reprezentace grupy $G = H_1 \times H_2$, tj. přímého součinu dvou podgrup

- pokud je grupa přímým součinem dvou svých podgrup a lze tedy každý prvek $g \in G$ napsat jednoznačně jako $g = h_1 h_2$, $h_1 \in H_1$ a $h_2 \in H_2$, pak z libovolných dvou IR $\Gamma_{H_1}^\mu$ a $\Gamma_{H_2}^\nu$ podgrup H_1 a H_2 dostaneme IR grupy G pomocí přímého součinu matic $D^\mu(h_1)$ a $D^\nu(h_2)$, tj.

$$D_{kr,ij}^{\mu\nu}(h_1 h_2) = D_{ki}^\mu(h_1) D_{lj}^\nu(h_2)$$

s charakterem $\chi^{\mu\nu}(h_1 h_2) = \chi^\mu(h_1) \chi^\nu(h_2)$

- že jde vskutku o IR lze vidět z Frobeniova kritéria ineducibility, neboť $g = h_1 h_2$

$$\sum_{g \in G} \chi^{\mu\nu}(g)^* \chi^{\mu\nu}(g) = \sum_{h_1 \in H_1} \chi^\mu(h_1)^* \chi^\mu(h_1) \cdot \sum_{h_2 \in H_2} \chi^\nu(h_2)^* \chi^\nu(h_2) = \#H_1 \cdot \#H_2 = \#G$$

$\Gamma_{H_1}^\mu$ a $\Gamma_{H_2}^\nu$ jsou IR

- navíc takto dostaneme všechny IR grupy G ,

neboť $\sum_{\mu, \nu} (d_\mu d_\nu)^2 = \#H_1 \cdot \#H_2 = \#G$

- příklady viz tabulky charakterů, např. pro $D_{3h} = C_{3v} \times C_s$

Pozn: pro polopřímý součin $G = H_1 \rtimes H_2$ lze také konstruovat IR přímo z repr. podgrupy H_1 a z repr. tzv. malých podgrup, ale zde již není prostor jít do podrobností, (viz např. S. Sternberg: Group theory and physics, kap. 3.8)