Transformace závislých a nezávislých proměnných

Shrnutí obecných výsledků

Uvažujme obecnou bodovou transformaci na prostoru nezávislých a závislých proměnných

$$\begin{aligned} \tilde{x}^i &= F^i(x,u)\,, \\ \tilde{u}^\mu &= G^\mu(x,u)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

kde $x=(x^1,\dots,x^n)$ jsou nezávislé a $u=(u^1,\dots,u^m)$ závislé proměnné. Tuto transformaci lze rozšířit do prostoru derivací, tj. najít transformace

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}^\mu}{\partial \tilde{x}^i} \equiv \tilde{u}^\mu_i &= H^\mu_i(x,u,\partial u)\,, \\ &\;\vdots \\ \frac{\partial^p \tilde{u}^\mu}{\partial \tilde{x}^{i_1}\dots\partial \tilde{x}^{i_p}} \equiv \tilde{u}^\mu_{i_1\dots i_p} &= H^\mu_{i_1\dots i_p}(x,u,\partial u,\dots,\partial^p u)\,, \end{aligned} \tag{2}$$

kde ∂u značí všechny první derivace závislých proměnných podle všech nezávislých proměnných a $\partial^p u$ značí všechny p-té derivace. Neznámé transformační funkce H^μ_i až $H^\mu_{i_1\dots i_p}$ určíme rekurentně pomocí rovnic

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}^\mu_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}^\mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^\mu_1(x,u,\partial u) \\ \vdots \\ H^\mu_n(x,u,\partial u) \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{D}_1 G^\mu(x,u) \\ \vdots \\ \mathrm{D}_n G^\mu(x,u) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}^\mu_{i_1\dots i_p 1} \\ \vdots \\ \tilde{u}^\mu_{i_1\dots i_p n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^\mu_{i_1\dots i_p 1}(x,u,\partial u,\dots,\partial^{p+1} u) \\ \vdots \\ H^\mu_{i_1\dots i_p n}(x,u,\partial u,\dots,\partial^{p+1} u) \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{D}_1 H^\mu_{i_1\dots i_p}(x,u,\partial u,\dots,\partial^p u) \\ \vdots \\ \mathrm{D}_n H^\mu_{i_1\dots i_p}(x,u,\partial u,\dots,\partial^p u) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

kde D_i je operátor úplné derivace

$$\mathrm{D}_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_\alpha u^\alpha_i \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{\alpha,j} u^\alpha_{ji} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_j} + \dots + \sum_{\alpha,j_1\dots j_p} u^\alpha_{j_1\dots j_p i} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{j_1\dots j_p}} + \cdots \tag{5}$$

a A je matice

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{D}_1 F^1(x,u) & \cdots & \mathrm{D}_1 F^n(x,u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{D}_n F^1(x,u) & \cdots & \mathrm{D}_n F^n(x,u) \end{pmatrix} \tag{6}$$

Mějme nyní systém parciálních diferenciálních rovnic k-tého řádu

$$R^\sigma(x,u,\partial u,\dots,\partial^k u) = 0, \qquad \sigma = 1,\dots,N\,, \tag{7}$$

kde $x=(x^1,\dots,x^n)$ jsou opět nezávislé a $u=(u^1,\dots,u^m)$ závislé proměnné, a uvažujme r-parametrickou Lieovu grupu bodových transformací s parametry $\varepsilon=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)$, kdy inverzní transformace jsou dány stejnými funkcemi jen s parametry odpovídajícími inverznímu prvku ε^{-1}, tj.

$$\begin{aligned} \tilde{x}^i &= F^i(x,u;\varepsilon)\,, & \qquad x^i &= F^i(\tilde{x},\tilde{u};\varepsilon^{-1})\,, \\ \tilde{u}^\mu &= G^\mu(x,u;\varepsilon)\,, & \qquad u^\mu &= G^\mu(\tilde{x},\tilde{u};\varepsilon^{-1})\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Pak ze známého řešení $u^\mu = \Theta^\mu(x)$ systému (7) dostaneme pomocí transformací (8) řešení téhož systému PDR vyjádřeného v nových proměnných $(\tilde{x},\tilde{u})$, které je však dáno implicitně vztahem

$$\tilde{u}^\mu = G^\mu(x,\Theta(x);\varepsilon) = G^\mu(F(\tilde{x},\tilde{u};\varepsilon^{-1}),\Theta(F(\tilde{x},\tilde{u};\varepsilon^{-1}));\varepsilon)\,. \tag{9}$$

Pokud je Lieova grupa bodových transformací (8) zároveň grupou symetrie systému (7), pak ztransformované řešení (9) je též řešením původního systému (7).

Zadání úloh

1. Převeďte dvourozměrnou Schrödingerovu rovnici

$$\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial y^2}+2E\psi(x,y)=0$$

do polárních souřadnic

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\,,\\ y &= r\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

2. Ukažte, že jednorozměrná rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$$

je invariantní při transformaci

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x+2t\varepsilon\,,\\ \tilde{t} &= t\,,\\ \tilde{u} &= u\mathrm{e}^{-x\varepsilon-t\varepsilon^2}\,. \end{aligned}$$

Využijte tuto transformaci k nalezení netriviálních řešení rovnice vedení tepla z řešení $u(x,t)=C$, kde C je konstanta.

Řešení

1. Při přechodu od kartézských souřadnic k polárním se mezi sebou netransformují závislé a nezávislé proměnné, takže se obecné vztahy pro transformaci (1) zjednoduší na

$$\begin{aligned} x &= F^x(r,\varphi,\chi)=r\cos\varphi\,,\\ y &= F^y(r,\varphi,\chi)=r\sin\varphi\,,\\ \psi &= G(r,\varphi,\chi)=\chi\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Odtud dostáváme pro matici A a její inverzi

$$A=\begin{pmatrix} \mathrm{D}_r F^x(r,\varphi) & \mathrm{D}_r F^y(r,\varphi)\\ \mathrm{D}_\varphi F^x(r,\varphi) & \mathrm{D}_\varphi F^y(r,\varphi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi/r\\ \sin\varphi & \cos\varphi/r\end{pmatrix}. \tag{12}$$

Pomocí rovnice (3) a (12) určíme, jak se transformují první derivace

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial x}\\ \frac{\partial\psi}{\partial y}\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}\mathrm{D}_r G\\ \mathrm{D}_\varphi G\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial\chi}{\partial r}\\ \frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\frac{\partial\chi}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\\ \sin\varphi\frac{\partial\chi}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}H_x(r,\varphi,\chi,\frac{\partial\chi}{\partial r},\frac{\partial\chi}{\partial\varphi})\\ H_y(r,\varphi,\chi,\frac{\partial\chi}{\partial r},\frac{\partial\chi}{\partial\varphi})\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Zcela obdobně pro druhé derivace z rovnice (4) dostáváme

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}\mathrm{D}_r H_x\\ \mathrm{D}_\varphi H_x\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}\cos\varphi\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}+\frac{\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial\varphi}\\ -\sin\varphi\frac{\partial\chi}{\partial r}+\cos\varphi\frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial\varphi}-\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2\chi}{\partial\varphi^2}\end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}\\ \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}\mathrm{D}_r H_y\\ \mathrm{D}_\varphi H_y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}\sin\varphi\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}-\frac{\cos\varphi}{r^2}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial\varphi}\\ \cos\varphi\frac{\partial\chi}{\partial r}+\sin\varphi\frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial\varphi}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2\chi}{\partial\varphi^2}\end{pmatrix}. \tag{15}$$

Protože pro transformaci dvourozměrné Schrödingerovy rovnice

$$\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial y^2}+2E\psi(x,y)=0 \tag{16}$$

nepotřebujeme smíšené derivace (které by měly ze vztahů (14) a (15) vyjít stejně!), určíme pouze druhé derivace podle x a podle y

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= \cos^2\varphi\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} + 2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi} - 2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}\,,\\ \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} &= \sin^2\varphi\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} - 2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi} + 2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}\end{aligned} \tag{17}$$

a dosazením do (16) nakonec dostaneme známý tvar Laplaceova operátoru v polárních souřadnicích

$$\frac{\partial^2\chi(r,\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\chi(r,\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\chi(r,\varphi)}{\partial\varphi^2} + 2E\chi(r,\varphi) = 0\,. \tag{18}$$

2. Abychom získali potřebné derivace pro dosazení do rovnice vedení tepla (pro jednoduchost budeme dále značit první derivace u_x a u_t a druhé derivace u_{xx}, u_{xt} a u_{tt})

$$u_{xx} - u_t = 0\,, \tag{19}$$

vyjádříme si inverzní transformaci

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x + 2t\varepsilon &&= F^x(x,t;\varepsilon)\,, & & x = \tilde{x} - 2\varepsilon\tilde{t} &&= F^x(\tilde{x},\tilde{t};-\varepsilon)\,,\\ \tilde{t} &= t &&= F^t(x,t;\varepsilon)\,, &\Rightarrow\quad & t = \tilde{t} &&= F^t(\tilde{x},\tilde{t};-\varepsilon)\,,\\ \tilde{u} &= u\mathrm{e}^{-x\varepsilon - t\varepsilon^2} &&= G(x,t;\varepsilon)\,, & & u = \tilde{u}\mathrm{e}^{\tilde{x}\varepsilon - \tilde{t}\varepsilon^2} &&= G(\tilde{x},\tilde{t};-\varepsilon)\,.\end{aligned} \tag{20}$$

Odtud snadno obdržíme matici A a její inverzi

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{D}_{\tilde{x}}F^x & \mathrm{D}_{\tilde{x}}F^t \\ \mathrm{D}_{\tilde{t}}F^x & \mathrm{D}_{\tilde{t}}F^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\varepsilon & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

a pomocí rovnice (3) určíme, jak se transformují první derivace

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_t \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} \mathrm{D}_{\tilde{x}}G \\ \mathrm{D}_{\tilde{t}}G \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} E\left[\varepsilon\tilde{u} + \tilde{u}_{\tilde{x}}\right] \\ E\left[-\varepsilon^2\tilde{u} + \tilde{u}_{\tilde{t}}\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\left[\varepsilon\tilde{u} + \tilde{u}_{\tilde{x}}\right] \\ E\left[\varepsilon^2\tilde{u} + 2\varepsilon\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{t}}\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_t \end{pmatrix}, \tag{22}$$

kde $E = \mathrm{e}^{\tilde{x}\varepsilon - \tilde{t}\varepsilon^2}$. Protože potřebujeme pouze u_{xx} a matice A^{-1} má první řádek $(1,0)$, dostaneme z (4) jednoduše

$$u_{xx} = \mathrm{D}_{\tilde{x}}H_x = E\left[\varepsilon^2\tilde{u} + 2\varepsilon\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}\right]\,. \tag{23}$$

Konečně dosazením do rovnice vedení tepla (19) máme

$$u_{xx} - u_t = E\left[\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} - \tilde{u}_{\tilde{t}}\right] = 0\,, \tag{24}$$

což po vydělení kladným výrazem E dává opět rovnici vedení tepla.

Obecné řešení $u = \Theta(x,t)$ přejde po transformaci (20) na řešení rovnice (24)

$$\tilde{u} = \Theta(x,t)\mathrm{e}^{-x\varepsilon - t\varepsilon^2} = \Theta(\tilde{x} - 2\varepsilon\tilde{t}, \tilde{t})\mathrm{e}^{-\tilde{x}\varepsilon + \tilde{t}\varepsilon^2}\,, \tag{25}$$

neboli konstantní řešení $u(x,t) = C$ přejde v netriviální jednoparametrickou třídu řešení rovnice vedení tepla (po odvlnkování)

$$u(x,t) = C\mathrm{e}^{-x\varepsilon + t\varepsilon^2}\,. \tag{26}$$