Nalezení obyčejné diferenciální rovnice mající zadanou bodovou symetrii

Přímé použití infinitezimálního kritéria invariance

Má-li být obyčejná diferenciální rovnice k-tého řádu

$$y_k = f(x, y, y_1, \ldots, y_{k-1}) , \qquad \text{kde } y_k = \frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k} , \tag{1}$$

invariatní vůči jednoparametrické Lieově grupě bodových symetrií generované infinitezimálním operátorem

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y} , \tag{2}$$

musí být splněno infinitezimální kritérium invariance

$$X^{(k)}(y_k - f(x, y, y_1, \ldots, y_{k-1}))\Big|_{y_k=f} = 0 . \tag{3}$$

$X^{(k)}$ je k-té rozšíření infinitezimálního operátoru X

$$X^{(k)} = X + \eta^{(1)}(x, y, y_1)\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + \eta^{(k)}(x, y, y_1, \ldots, y_k)\frac{\partial}{\partial y_k} , \tag{4}$$

který nalezneme pomocí vztahů

$$\eta^{(1)} = \mathrm{D}_x\eta(x, y) - (\mathrm{D}_x\xi(x, y))y_1, \tag{5}$$

$$\vdots$$

$$\eta^{(k)} = \mathrm{D}_x\eta^{(k-1)}(x, y, y_1, \ldots, y_{k-1}) - (\mathrm{D}_x\xi(x, y))y_k . \tag{6}$$

Rovnice (3) je parciální diferenciální rovnice prvního řádu pro neznámou funkci $f(x, y, y_1, \ldots, y_{k-1})$, jejíž řešení lze nalézt např. použitím metody charakteristik.

Použití kanonických proměnných

K nalezení obyčejné diferenciální rovnice k-tého řádu (1) invariatní vůči jednoparametrické Lieově grupě bodových symetrií generované infinitezimálním operátorem (2) můžeme též využít kanonické proměnné dané rovnicemi

$$Xr(x, y) = 0 , \qquad Xs(x, y) = 1 , \tag{7}$$

ve kterých má operátor (2) jednoduchý tvar (jde o generátor translace v nové závislé proměnné $s(x, y)$)

$$X^{(r,s)} = \frac{\partial}{\partial s} . \tag{8}$$

Z infinitezimálního kritéria plyne, že ODR v těchto nových proměnných nebude explicitně záviset na s a obecná ODR mající zadanou symetrii tedy bude

$$\frac{\mathrm{d}^k s}{\mathrm{d}r^k} = G(r, \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{k-1}s}{\mathrm{d}r^{k-1}}) , \tag{9}$$

kde G je libovolná funkce. Přechodem zpět k proměnným (x, y) dostaneme obecnou ODR invariatní vůči bodovým transformacím generovaným operátorem (2) v původních souřadnicích.

Použití diferenciálních invariantů

Další možností je nalezení všech invariantů (obvykle diferenciálních) splňujících

$$X^{(k)}v(x, y, y_1, \ldots, y_k) = 0 , \tag{10}$$

kterých je $k + 1$ nezávislých a které lze určit buď přímo pomocí metody charakteristik, nebo pomocí derivování, známe-li první dva, takto

$$Xu = 0 , \quad X^{(1)}v_1 = 0 , \quad v_2 = \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{D}_x v_1}{\mathrm{D}_x u} , \ \ldots, \ v_k = \frac{\mathrm{d}v_{k-1}}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{D}_x v_{k-1}}{\mathrm{D}_x u} . \tag{11}$$

Obecná ODR mající zadanou symetrii pak bude mít tvar

$$G(u(x, y), v_1(x, y, y_1), v_2(x, y, y_1, y_2), \ldots, v_k(x, y, y_1, \ldots, y_k)) = 0 , \tag{12}$$

kde G je opět libovolná funkce.

Zadání úloh

1. Určete obecnou obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu invariantí vůči jednoparametrické Lieově grupě bodových symetrií generované infinitezimálním operátorem

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\,.$$

2. Určete obecnou obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu invariantí vůči Galileově grupě transformací generované infinitezimálním operátorem

$$X = x\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Řešení

1. (a) **Přímé použití infinitezimálního kritéria invariance**

První rozšíření zadaného infinitezimálního operátoru

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \tag{13}$$

určíme pomocí (4) a (5), přičemž nyní $\xi(x,y) = x$ a $\eta(x,y) = 1$. Dosazením dostaneme

$$X^{(1)} = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - y_1\frac{\partial}{\partial y_1} \tag{14}$$

a infinitezimální kritérium invariance

$$X^{(1)}(y_1 - f(x,y))\Big|_{y_1=f} = 0 \tag{15}$$

vede na parciální diferenciální rovnici 1. řádu

$$-x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f(x,y)\,, \tag{16}$$

kterou lze vyřešit metodou charakteristik. Rovnice charakteristik jsou

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x\,, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -1 \tag{17}$$

s počátečními podmínkami (lze je volit téměř libovolně, avšak pokud možno jednoduše)

$$x(0) = x_0\,, \qquad y(0) = 0\,, \tag{18}$$

jejichž vyřešením dostaneme

$$x(t) = x_0\mathrm{e}^{-t}\,, \qquad y(t) = -t\,. \tag{19}$$

Hledaná funkce f je podél charakteristik dána rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = z(t)\,, \qquad z(0) = g(x_0)\,, \tag{20}$$

kde $z(t) = f(x(t), y(t))$ a g je libovolná funkce. Řešení je

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = g(x_0)\mathrm{e}^{t}\,. \tag{21}$$

Hledanou funkci $f(x,y)$ určíme nakonec tak, že pomocí vztahů (19) určíme počáteční x_0 a t pro charakteristiku jdoucí bodem (x,y), tj.

$$t = -y\,, \qquad x_0 = x\mathrm{e}^{t} = x\mathrm{e}^{-y}\,. \tag{22}$$

Dosazením do (21) dostaneme

$$f(x,y) = z(-y) = g(x\mathrm{e}^{-y})\mathrm{e}^{-y}\,, \tag{23}$$

což můžeme pomocí $\mathrm{e}^{-y} = x_0/x$ přestat též do tvaru

$$f(x,y) = g(x_0)\mathrm{e}^{-y} = g(x_0)\frac{x_0}{x} = \frac{h(x_0)}{x} = \frac{h(x\mathrm{e}^{-y})}{x}\,, \tag{24}$$

kde h je opět libovolná funkce.

K témuž výsledku se můžeme dostat i rychleji přepisem rovnic charakteristik (17) a (21) do tvaru

$$-\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{\mathrm{d}y}{1} = \frac{\mathrm{d}f}{f} = \mathrm{d}t\,. \tag{25}$$

Integrací první rovnice (obsahující pouze $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$) dostaneme jako (vhodně zvolenou) integrační konstantu výraz, který se nemění podél charakteristiky

$$\ln x + \ln c = y\,, \quad c(x,y) = x\mathrm{e}^{-y}\,. \tag{26}$$

A dále např. integrací rovnice obsahující pouze $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}f$ dostaneme

$$\ln f = -\ln x + \ln A\,, \quad f(x,y) = \frac{A}{x} = \frac{h(x\mathrm{e}^{-y})}{x}\,, \tag{27}$$

kde jsme nakonec za integrační konstantu A dosadili libovolnou funkci konstantního výrazu $c(x,y)$ z řešení (26). Vidíme, že výsledek je stejný jako (24). Pokud bychom integrovali rovnici obsahující pouze $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}f$, dostali bychom (vhodnou volbou integrační konstanty)

$$\ln f - \ln A = -y\,, \quad f(x,y) = A\mathrm{e}^{-y} = g(x\mathrm{e}^{-y})\mathrm{e}^{-y}\,, \tag{28}$$

což je totéž jako (23).

(b) **Použití kanonických proměnných**

Kanonické proměnné pro infinitezimální operátor (13) nalezneme jako řešení rovnic (7). Nová nezávislá proměnná $r(x,y)$ lze zvolit jako libovolný výraz, který se nemění podél charakteristiky, např. výraz určený v rovnici (26), tj.

$$r(x,y) = x\mathrm{e}^{-y}\,. \tag{29}$$

Závislou proměnnou $s(x,y)$ určíme tak, že zintegrujeme rovnici charakteristiky pro $Xs(x,y) = 1$, která má např. tvar

$$-\frac{\mathrm{d}y}{1} = \frac{\mathrm{d}s}{1}\,. \tag{30}$$

Nejjednodušší volba je (nulová integrační konstanta)

$$s(x,y) = y\,. \tag{31}$$

V těchto kanonických proměnných je obecná ODR 1. řádu mající zadanou symetrii dána vztahem

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = G(r)\,. \tag{32}$$

Tuto rovnici převedeme do původních proměnných

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{D}_x s}{\mathrm{D}_x r} = \frac{y_1}{\mathrm{e}^{-y} - x\mathrm{e}^{-y}y_1} = G(x\mathrm{e}^{-y}) \tag{33}$$

a vyjádříme y_1

$$y_1 = f(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{-y}G(x\mathrm{e}^{-y})}{1 + x\mathrm{e}^{-y}G(x\mathrm{e}^{-y})} = \mathrm{e}^{-y}g(x\mathrm{e}^{-y})\,, \tag{34}$$

což je opět totéž jako (23).

(c) **Použití diferenciálních invariantů**

Diferenciální invarianty $u(x,y), v_1(x,y,y_1), \ldots, v_k(x,y,y_1,\ldots,y_k)$ pro infinitezimální operátor (13) nalezneme pomocí vztahů (11). První invariant splňuje stejnou rovnici jako kanonická proměnná $r(x,y)$, takže je dán výrazem (31)

$$u(x,y) = x\mathrm{e}^{-y}\,. \tag{35}$$

Druhý invariant najdeme pomocí

$$X^1 v_1(x,y,y_1) = x\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} - y_1\frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0\,. \tag{36}$$

Metodou charakteristik tuto PDR převedeme na obyčejné diferenciální rovnice pro charakteristiky

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{1} = -\frac{\mathrm{d}y_1}{y_1} \tag{37}$$

a invariant v_1 dostaneme jako konstantu při integraci libovolné ze dvou ODR obsahujících $\mathrm{d}y_1$, např.

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{\mathrm{d}y_1}{y_1}\,, \quad \text{a tedy} \quad v_1 = xy_1\,. \tag{38}$$

Druhá rovnice by vedla na invariant $y_1\mathrm{e}^y = v_1/u$, který je, jak vidíme, již funkcí invariantů u a v_1. Protože máme určit ODR 1. řádu, další invarianty již nepotřebujeme a můžeme psát, že obecná ODR 1. řádu invariantní vůči grupě bodových symetrií generované (13) má tvar

$$G(u,v_1) = G(x\mathrm{e}^{-y}, xy_1) = 0\,, \tag{39}$$

která může být přepsána do tvaru

$$y_1 = \frac{h(x\mathrm{e}^{-y})}{x}\,, \tag{40}$$

což je opět stejný výsledek jako výše.

2. U této úlohy použijeme pouze metodu diferenciálních invariantů, ostatní přístupy vedou samozřejmě k témuž výsledku. Nejprve určíme rozšíření infinitezimálního operátoru

$$X = x\frac{\partial}{\partial y} \tag{41}$$

pomocí (4) a (5), přičemž nyní $\xi(x,y) = 0$ a $\eta(x,y) = x$. Dosazením dostaneme

$$X^{(2)} = x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y_1}\,. \tag{42}$$

První invariant splňuje $Xu(x,y) = 0$ a protože $\xi = 0$ v (41), musí být invariantem

$$u(x,y) = x\,. \tag{43}$$

Druhý invariant najdeme pomocí

$$X^1 v_1(x,y,y_1) = x\frac{\partial v_1}{\partial y} + y_1\frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0 \tag{44}$$

a metodou charakteristik tuto PDR převedeme na obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}y_1}{1}\,, \quad x = u = \mathrm{konst}\,. \tag{45}$$

Invariant v_1 dostaneme jako konstantu při integraci této rovnice, a tedy

$$v_1(x,y,y_1) = y_1 - \frac{y}{x}\,. \tag{46}$$

Poslední invariant v_2 splňující $X^{(2)}v_2 = 0$ můžeme volit jednoduše jako

$$v_2(x,y,y_1,y_2) = y_2 \tag{47}$$

opět díky tomu, že $\eta^{(2)} = 0$. Obecná ODR 2. řádu invariantní vůči grupě bodových symetrií generované (41) má tvar

$$G(u,v_1,v_2) = G(x, y_1 - y/x, y_2) = 0\,, \tag{48}$$

která může být přepsána do tvaru

$$y_2 = f(x, y_1 - y/x)\,. \tag{49}$$

Pokud bychom poslední invariant určili jako diferenciální invariant

$$v_2' = \frac{\mathrm{D}_x v_1}{\mathrm{D}_x u} = y_2 - \frac{1}{x}\left(y_1 - \frac{y}{x}\right) , \tag{50}$$

dostali bychom

$$y_2 = g(x, y_1 - y/x) + \frac{1}{x}\left(y_1 - \frac{y}{x}\right) , \tag{51}$$

což může opět být přepsáno na tvar (49).