Charakteristika bodové symetrie

Zadání úloh

1. Nechť
$$X=\sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{\alpha=1}^m \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$
je infinitezimální operátor generující jednoparametrickou Lieovu grupu transformací na prostoru nezávislých $(x^1,\ldots,x^n)$ a závislých $(u^1,\ldots,u^m)$ proměnných a nechť
$$X^{(k)}=X+\sum_{\alpha=1}^m \sum_{\substack{J\\ 1\le \#J\le k}} \eta^\alpha_J \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J}$$
je k-té rozšíření tohoto operátoru do prostoru derivací, kde $\#J$ značí počet indexů v multiindexu $J=(j_1,\ldots,j_p)$ a suma běží přes všechny derivace až do k-tého řádu. Ukažte, že infinitezimály η^α_J lze vyjádřit přímo pomocí ξ^i a η^α pomocí vztahu
$$\eta^\alpha_J=\mathrm{D}_J\left(\eta^\alpha-\sum_{i=1}^n \xi^i u^\alpha_i\right)+\sum_{i=1}^n \xi^i u^\alpha_{Ji}\,.$$
Výraz v závorce $\hat\eta^\alpha=\eta^\alpha-\sum_{i=1}^n \xi^i u^\alpha_i$ se nazývá charakteristika dané bodové symetrie.

2. Nechť
$$\hat X=\sum_{\alpha=1}^m \hat\eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$
je charaketristický tvar infinitezimálního operátoru z první úlohy, jehož rozšíření do prostoru derivací je dáno jednoduše pomocí
$$\hat X^{(k)}=\sum_{\alpha=1}^m \sum_{\substack{J\\ 0\le \#J\le k}} \hat\eta^\alpha_J \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J}\,,\qquad \hat\eta^\alpha_J=\mathrm{D}_J\hat\eta^\alpha\,.$$
Pomocí vztahu (viz předcházející úloha)
$$\eta^\alpha_J=\mathrm{D}_J\hat\eta^\alpha+\sum_{i=1}^n \xi^i u^\alpha_{Ji}$$
dokažte, že platí
$$X^{(k)}=\hat X^{(k)}+\sum_{i=1}^n \xi^i D_i\,.$$

Řešení

1. Víme, že infinitezimály k-tého rozšíření infinitezimálního operátoru
$$X^{(k)}=\sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{\alpha=1}^m \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\sum_{\alpha=1}^m \sum_{\substack{J\\ 1\le \#J\le k}} \eta^\alpha_J \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J} \tag{1}$$
splňují rekurentní vztah
$$\eta^\alpha_{j_1\ldots j_p}=\mathrm{D}_{j_p}\eta^\alpha_{j_1\ldots j_{p-1}}-\sum_{i=1}^n (\mathrm{D}_{j_p}\xi^i)u^\alpha_{j_1\ldots j_{p-1}i}\,. \tag{2}$$
Použijeme-li Leibnitzovo pravidlo pro derivace
$$\mathrm{D}_j\sum_{i=1}^n \xi^i u^\alpha_i=\sum_{i=1}^n(\mathrm{D}_j\xi^i)u^\alpha_i+\sum_{i=1}^n \xi^i(\mathrm{D}_j u^\alpha_i)\,,$$

dostaneme pro první rozšíření

$$\eta_j^\alpha = \mathrm{D}_j \eta^\alpha - \sum_{i=1}^n (\mathrm{D}_j \xi^i) u_i^\alpha = \mathrm{D}_j \eta^\alpha - \mathrm{D}_j \sum_{i=1}^n \xi^i u_i^\alpha + \sum_{i=1}^n \xi^i u_{ji}^\alpha \,,$$

což je speciální případ vztahu, který máme dokázat,

$$\eta_J^\alpha = \mathrm{D}_J \left(\eta^\alpha - \sum_{i=1}^n \xi^i u_i^\alpha \right) + \sum_{i=1}^n \xi^i u_{Ji}^\alpha \,. \tag{3}$$

pro $J = (j)$. Pro obecné J dokážeme tento vztah indukcí. Předpokládejme, že (3) platí pro určitý multiindex $J = (j_1, \ldots, j_p)$. Ukažme, že pak platí též pro multiindex $Jk = (j_1, \ldots, j_p, k)$. Vyjdeme ze vztahu (2) pro multiindex Jk a použijeme opět Leibnitzovo pravidlo

$$\begin{aligned}
\eta_{Jk}^\alpha &= \mathrm{D}_k \eta_J^\alpha - \sum_{i=1}^n (\mathrm{D}_k \xi^i) u_{Ji}^\alpha \\
&= \mathrm{D}_k \mathrm{D}_J \left(\eta^\alpha - \sum_{i=1}^n \xi^i u_i^\alpha \right) + \mathrm{D}_k \left(\sum_{i=1}^n \xi^i u_{Ji}^\alpha \right) - \sum_{i=1}^n (\mathrm{D}_k \xi^i) u_{Ji}^\alpha \\
&= \mathrm{D}_{Jk} \left(\eta^\alpha - \sum_{i=1}^n \xi^i u_i^\alpha \right) + \sum_{i=1}^n \xi^i u_{Jki}^\alpha \,.
\end{aligned}$$

V druhé rovnosti jsme použili indukční předpoklad. Tímto je obecný vztah (3) dokázán.

2. Zapišme k-té rozšíření infinitezimálního operátoru (1) ve tvaru

$$X^{(k)} = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\substack{J \\ 0 \le \# J \le k}} \eta_J^\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \tag{4}$$

a dosaďme za η_J^α výraz

$$\eta_J^\alpha = \mathrm{D}_J \hat{\eta}^\alpha + \sum_{i=1}^n \xi^i u_{Ji}^\alpha \,.$$

Přeuspořádáním výrazů dostáváme

$$\begin{aligned}
X^{(k)} &= \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\substack{J \\ 0 \le \# J \le k}} \left(\mathrm{D}_J \hat{\eta}^\alpha + \sum_{i=1}^n \xi^i u_{Ji}^\alpha \right) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \\
&= \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\substack{J \\ 0 \le \# J \le k}} (\mathrm{D}_J \hat{\eta}^\alpha) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} + \sum_{i=1}^n \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\substack{J \\ 0 \le \# J \le k}} u_{Ji}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \right) \\
&= \hat{X}^{(k)} + \sum_{i=1}^n \xi^i \mathrm{D}_i \,,
\end{aligned}$$

což jsme měli ukázat.