Snížení řádu, případně vyřešení obyčejné diferenciální rovnice využitím její bodové symetrie

Použití kanonických proměnných

Obyčejnou diferenciální rovnici k-tého řádu

$$y_k = f(x, y, y_1, \ldots, y_{k-1})\,, \qquad \text{kde } y_k = \frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}\,, \tag{1}$$

invariatní vůči jednoparametrické Lieově grupě bodových symetrií generované infinitezimálním operátorem

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}\,, \tag{2}$$

lze převést na ODR o jeden řád nižší. K tomu ovšem obecně potřebujeme najít kanonické proměnné dané rovnicemi

$$Xr(x, y) = 0\,, \qquad Xs(x, y) = 1\,, \tag{3}$$

ve kterých má operátor (2) jednoduchý tvar (jde o generátor translace v nové závislé proměnné $s(x, y)$)

$$X^{(r,s)} = \frac{\partial}{\partial s}\,.$$

Z infinitezimálního kritéria plyne, že ODR v těchto nových proměnných nebude explicitně záviset na s

$$\frac{\mathrm{d}^k s}{\mathrm{d}r^k} = G(r, \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{k-1} s}{\mathrm{d}r^{k-1}})$$

a zavedením nové proměnné

$$z(r) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}$$

dostaneme rovnici o jeden řád nižší

$$\frac{\mathrm{d}^{k-1} z}{\mathrm{d}r^{k-1}} = G(r, z, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{k-2} z}{\mathrm{d}r^{k-2}})\,.$$

Pokud máme obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu

$$y_1 = f(x, y)\,,$$

která bude mít v kanonických proměnných tvar

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = G(r)\,,$$

můžeme přímo integrovat

$$s(x, y) = \int^{r(x,y)} G(r')\mathrm{d}r'\,,$$

čímž dostaneme implicitní rovnici pro $y = y(x)$.

Použití diferenciálních invariantů

Další možností je použití diferenciálních invariantů splňujících

$$Xu = 0\,, \quad X^{(1)}v_1 = 0\,, \quad v_2 = \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{D}_x v_1}{\mathrm{D}_x u}\,,\ \ldots,\ v_k = \frac{\mathrm{d}v_{k-1}}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{D}_x v_{k-1}}{\mathrm{D}_x u}\,. \tag{4}$$

Zapíšeme-li ODR (1) pomocí těchto invariantů, dostaneme obecně

$$G(u, v_1, \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}u}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{k-1} v_1}{\mathrm{d}u^{k-1}}) = 0\,, \tag{5}$$

a tedy rovnici o jeden řád nižší. Známe-li řešení $v_1 = \Phi(u, c_1, \ldots, c_{k-1})$ této rovnice, kde c_i jsou integrační konstanty, nalezneme řešení původní rovnice vyřešením ODR 1. řádu

$$v_1(x, y, y_1) = \Phi(u(x, y), , c_1, \ldots, c_{k-1})\,,$$

která je opět invariantní vůči jednoparametrické LGT generované (2).

Pokud má ODR (1) r-parametrickou grupu bodových symetrií, která je řešitelná, tj. její infinitezimální generátory splňují komutační relace

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{j-1} c_{ij}^k X_k \,, \quad 1 \le i \le j,\ j = 2, \ldots, r \,,$$

lze danou rovnici redukovat postupně, přičemž nejprve nalezneme diferenciální invarianty operátoru $X_1^{(k)}$, převedeme rovnici na tvar (5) a vyjádříme další operátor $X_2^{(k)}$ v těchto nových proměnných jako

$$X_2^{(k)} = \alpha(u)\frac{\partial}{\partial u} + \beta(u, v_1)\frac{\partial}{\partial v_1} + \cdots + \beta^{(k-1)}(u, v_1, \ldots, v_k)\frac{\partial}{\partial v_k} \,. \tag{6}$$

Rovnice (5) je též invariantní vůči grupě generované tímto infinitezimálním operátorem a můžeme celý postup opakovat, dokud nesnížíme původní rovnici o r řádů, nebo nedostaneme ODR 1. řádu, kterou vyřešíme např. přechodem ke kanonickým proměnným.

Zadání úloh

1. Vyřešte obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{x-y}$$

invariantí vůči jednoparametrické Lieově grupě transformací generované infinitezimálním operátorem

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Jde o škálování obou proměnných stejným faktorem $\tilde{x} = \alpha x, \tilde{y} = \alpha y$.

2. Využijte bodové symetrie obyčejné diferenciální rovnice lineárního harmonického oscilátoru

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 y = 0$$

pro převedení na rovnici prvního řádu a případně její vyřešení. Uvažujte komutativní dvouparametrickou LGT generovanou infinitezimálními operátory (translace v čase t a škálování v y)

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}\,, \qquad X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

3. Vyřešte lineární ODR 2. řádu

$$L(y) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + p_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p_2(x)y = g(x)$$

pomocí komutativní dvouparametrické LGT generované infinitezimálními operátory

$$X_1 = \phi_1(x)\frac{\partial}{\partial y}\,, \qquad X_2 = \phi_2(x)\frac{\partial}{\partial y}\,,$$

kde $\phi_1(x)$ a $\phi_2(x)$ jsou řešením homogenní rovnice $L(y) = 0$.

Řešení

1. K vyřešení použijeme kanonické proměnné operátoru

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\,,$$

které jsou řešením rovnic (3). Novou nezávislou proměnnou $r(x, y)$ určíme jako konstantu při integraci rovnice charakteristiky, např.

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln x + \ln r = \ln y \quad \Rightarrow \quad r(x,y) = \frac{y}{x}\,,$$

kdežto závislá proměnná $s(x, y)$ je např. řešením rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}s}{1} \quad \Rightarrow \quad s = \ln y\,.$$

Integrační konstanta není v tomto případě důležitá, šlo by pouze o posunutí proměnné s. Pro převedení rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{x-y} = \frac{1}{1-r} \tag{7}$$

do kanonických proměnných potřebujeme určit, jak se transformuje derivace $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. Pomocí vztahů

$$x = \frac{\mathrm{e}^s}{r}\,, \qquad y = \mathrm{e}^s$$

nejprve vyjádříme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{D}_r y}{\mathrm{D}_r x} = \frac{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}\mathrm{e}^s}{(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{r^2})\mathrm{e}^s}$$

a dosazením do rovnice (7) a úpravami nakonec dostaneme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r(1-r+r^2)}\,,$$

kterou již můžeme integrovat (např. metodou parciální zlomků)

$$s = -\frac{1}{2}\ln(1-r+r^2) + \ln r + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2r-1}{\sqrt{3}}\,.$$

Dosazením za $s = \ln y$ a $r = y/x$ však dostaneme rovnici, ze které $y = y(x)$ nelze vyjádřit. (Porovnejte s řešení, které pro zadanou rovnici vrátí *Mathematica*.)

2. Diferenciální rovnici lineárního harmonického oscilátoru

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 y = 0 \tag{8}$$

můžeme snížit o jeden řád např. pomocí kanonických proměnných pro infinitezimální operátor

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}\,.$$

Protože tento operátor generuje translace nezávislé proměnné, můžeme jako kanonické proměnné vzít

$$r = y, \quad s = t\,, \tag{9}$$

které triviálně splňují rovnice (3). Derivace se transformují pomocí vztahů

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{D}_r y}{\mathrm{D}_r t} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{D}_r \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\mathrm{D}_r t} = -\frac{\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}r^2}}{\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}\right)^3}$$

a dosazením do rovnice (8) a přechodem k proměnné $z = \mathrm{d}s/\mathrm{d}r$ nakonec dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = \omega^2 r z^3\,. \tag{10}$$

Tato rovnice je sice invariantní vůči škálování $\tilde{r} = \alpha r$, $\tilde{z} = \frac{1}{\alpha} z$ generovanému operátorem

$$X_2^{(1)(r,z)} = r\frac{\partial}{\partial r} - z\frac{\partial}{\partial z}$$

a mohli bychom tuto symetrii využít k řešení, avšak rovnici (10) lze integrovat přímo

$$\frac{\mathrm{d}z}{z^3} = \omega^2 r \mathrm{d}r \Rightarrow -\frac{1}{z^2} = \omega^2 r^2 - c_1^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = z = \frac{1}{\sqrt{c_1^2 - \omega^2 r^2}}\,.$$

Další integrací vyjádříme

$$s = \frac{1}{\omega}\arctan\frac{\omega r}{\sqrt{c_1^2 - \omega^2 r^2}} + c_2$$

a dosazením z (9) nakonec dostaneme klasické řešení

$$y = \frac{c_1}{\omega}\sin\omega(t - c_2)\,.$$

3. Abychom vyřešili lineární ODR 2. řádu

$$L(y) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + p_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p_2(x)y = g(x)\,, \tag{11}$$

tak nejprve snížíme řád tento rovnice pomocí diferenciálních invariantů infinitezimálního operátoru

$$X_1^{(2)} = \phi_1(x)\frac{\partial}{\partial y} + \phi_1'(x)\frac{\partial}{\partial y_1} + \phi_1''(x)\frac{\partial}{\partial y_2} \tag{12}$$

a pak obdrženou rovnici vyintegrujeme využitím

$$X_2 = \phi_2(x)\frac{\partial}{\partial y}\,. \tag{13}$$

Invarianty $u(x,y)$ a $v_1(x,y,y_1)$ splňující (4) pro operátor (12) můžeme vzít jako

$$u = x\,, \quad v_1 = \frac{y_1}{\phi_1'(x)} - \frac{y}{\phi_1(x)}\,, \tag{14}$$

kde druhý invariant je integrační konstantou rovnice (x hraje roli parametru, jde o invariant u)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\phi_1(x)} = \frac{\mathrm{d}y_1}{\phi_1'(x)}\,.$$

Derivováním určíme další invariant

$$v_2 = \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{D}_x v_1}{\mathrm{D}_x u} = \frac{y_2}{\phi_1'(x)} - y_1\left(\frac{\phi_1''(x)}{(\phi_1'(x))^2} - \frac{1}{\phi_1(x)}\right) + y\frac{\phi_1'(x)}{(\phi_1(x))^2} \tag{15}$$

a vyjádříme-li ze vztahů (14) a (15) derivace y_1 a y_2, dostaneme dosazením do rovnice (11) ODR 1. řádu

$$\phi_1'(u)\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}u} + \left(\phi_1''(u) + \frac{(\phi_1'(u))^2}{\phi_1(u)} + p_1(u)\phi_1'(u)\right)v_1 = g(u)\,, \tag{16}$$

která je invariantní vůči transformacím generovaným operátorem

$$X_2^{(1)(u,v_1)} = \alpha(u)\frac{\partial}{\partial u} + \beta(u,v_1)\frac{\partial}{\partial v_1}\,,$$

kde $\alpha(u) = X_2 u = 0$ a

$$\beta(u,v_1) = X_2^{(1)}v_1 = \left(\phi_2(x)\frac{\partial}{\partial y} + \phi_2'(x)\frac{\partial}{\partial y_1}\right)\left(\frac{y_1}{\phi_1'(x)} - \frac{y}{\phi_1(x)}\right) = \frac{w_{\phi_1\phi_2}}{\phi_1'\phi_1}\,,$$

neboli

$$X_2^{(1)(u,v_1)} = \frac{w_{\phi_1\phi_2}(u)}{\phi_1'(u)\phi_1(u)}\frac{\partial}{\partial v_1}\,, \tag{17}$$

kde $w_{\phi_1\phi_2} = \phi_1\phi_2' - \phi_1'\phi_2$. Rovnici (16) vyřešíme pomocí kanonických proměnných operátoru (17)

$$R = u\,, \quad S = \frac{\phi_1'(u)\phi_1(u)}{w_{\phi_1\phi_2}(u)}v_1\,,$$

v nichž má rovnice (16) jednoduchý tvar

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}R} = \frac{g(R)\phi_1(R)}{w_{\phi_1\phi_2}(R)}\,.$$

Integrací obdržíme rovnici

$$S = \frac{y_1\phi_1(x) - y\phi_1'(x)}{w_{\phi_1\phi_2}(x)} = \int^x \frac{g(R)\phi_1(R)}{w_{\phi_1\phi_2}(R)}\mathrm{d}R + C_2\,, \tag{18}$$

která je invariantní vůči X_1 a opět přechodem ke kanonickým proměnným

$$r = x\,, \quad s = \frac{y}{\phi_1(x)}$$

a integrací obdržené rovnice (ještě doplním) nakonec dostaneme

$$s = \frac{y}{\phi_1(x)} = c_1 + c_2\frac{\phi_2(x)}{\phi_1(x)} + \frac{\phi_2(x)}{\phi_1(x)}\int^x \frac{g(r)\phi_1(r)}{w_{\phi_1\phi_2}(r)}\mathrm{d}r - \int^x \frac{g(r)\phi_2(r)}{w_{\phi_1\phi_2}(r)}\mathrm{d}r\,.$$