Lieovy teorémy

- aniž bychom zacházeli do detailů, shrneme nejprve základní výsledky Lieovy teorie r-parametrických Lieových grup transformací
  [důkazy lze nalézt v Bluman, Anco (1-par. LGT), příp. v Cohnově knize z roku 1965 (pouze Lieovy grupy) apod.]

Lieův první základní teorém (někdy v podobě jen pro LG, ne pro LGT)

- Mějme r-par. LGT $\tilde{x} = F(x,\varepsilon)$, kde $x = (x^1,\dots,x^n)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)$ $\quad (*)$

  s operací skládání parametrů

  $$\phi(\varepsilon,\delta) = (\phi_1(\varepsilon,\delta),\dots,\phi_r(\varepsilon,\delta)), \quad \delta = (\delta_1,\dots,\delta_r),$$ kde $\phi_1,\dots,\phi_r$ jsou analyt. fce

  odpovídající složení dvou transformací

  $$\tilde{\tilde{x}} = F(\tilde{x},\delta) = F(F(x,\varepsilon),\delta) = F(x,\phi(\varepsilon,\delta)).$$

Dále nechť $\Xi(x)$ je infinitezimální matice $(r\times n)$ s prvky

$$\xi^{\alpha j}(x) = \left.\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial \varepsilon_\alpha}\right|_{\varepsilon = e} = \left.\frac{\partial F^j(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_\alpha}\right|_{\varepsilon = e} \qquad \begin{array}{l}\alpha = 1,\dots,r\\ j = 1,\dots,n\end{array}$$

vyčísleno pro ε odpovídající identitě

a $\Theta(\varepsilon)$ je matice $r\times r$ s prvky

$$\Theta^\alpha_{\ \beta}(\varepsilon) = \left.\frac{\partial\phi_\beta(a,b)}{\partial b_\alpha}\right|_{(a,b)=(\varepsilon,e)}, \quad \text{neboli} \quad \Theta(\varepsilon) = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial b_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial b_1} & \cdots & \frac{\partial\phi_r}{\partial b_1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial b_r} & & \cdots & \frac{\partial\phi_r}{\partial b_r}\end{pmatrix}\right|_{(a,b)=(\varepsilon,e)}$$

a $\Psi(\varepsilon) = \Theta(\varepsilon)^{-1}$

Pak na jistém okolí identity $(\varepsilon \leftrightarrow e)$ jsou transformace $(*)$ ekvivalentní řešení systému $r.n$ parciálních diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\tilde{x}^1}{\partial\varepsilon_1} & \frac{\partial\tilde{x}^2}{\partial\varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial\tilde{x}^n}{\partial\varepsilon_1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\tilde{x}^1}{\partial\varepsilon_r} & & \cdots & \frac{\partial\tilde{x}^n}{\partial\varepsilon_r}\end{pmatrix} = \Psi(\varepsilon)\,\Xi(\tilde{x})$$

s poč. podmínkou $\tilde{x} = x$ pro $\varepsilon = e$ (obvykle $\varepsilon = 0$)

Speciálně pro 1-par. LGT máme ($\Psi(\varepsilon)$ je nyní jediná fce, index α odpadá)

$$\left(\frac{d\tilde{x}^1}{d\varepsilon}, \frac{d\tilde{x}^2}{d\varepsilon} \dots \frac{d\tilde{x}^n}{\partial\varepsilon}\right) = \Psi(\varepsilon)\left(\xi^1(\tilde{x}) \dots \xi^n(\tilde{x})\right)$$

a obecně lze nalézt novou parametrizaci $\tau(\varepsilon)$ takovou, že $\Psi'(\tau) = 1$,

$$\phi'(\tau_1,\tau_2) = \tau_1 + \tau_2 \quad \text{a tedy} \quad \frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \underset{\text{vektor}}{\xi(\tilde{x})}$$ s poč. podm. $\tilde{x} = x$ pro $\tau = 0$

přičemž $\tau(\varepsilon) = \int_{\varepsilon = e}^{\varepsilon} \Psi(\varepsilon')\,d\varepsilon'$

Pozn. Lze též ukázat (Cohn 1965), že

$$\Theta^{-1}(\varepsilon)^\alpha_{\ \beta} = \Psi^\alpha_{\ \beta}(\varepsilon) = \left.\frac{\partial\phi_\beta(a,b)}{\partial b_\alpha}\right|_{(a,b)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)}$$

Dk: rozvojem v δ výrazu
$F(x,\varepsilon+\delta) =$
$= F(F(x,\varepsilon),\phi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\delta))$
a porovnáním členů v δ

Infinitezimální generátory X_α

- pro každý parametr ε_α r-par. LGT definujme operátor na prostoru funkcí $f(x)$:

$$X_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \xi^{\alpha j}(x) \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \alpha = 1, \dots, r$$

píšeme dolů, protože horní index budeme používat pro rozšíření do prostoru derivací

pro takto definované oper. lze Lieův první teorém formulovat tak, že transf. (*) jsou ekvivalentní

$$\tilde{x} = e^{\mu_1 X_1} e^{\mu_2 X_2} \dots e^{\mu_r X_r} x$$

, pro určité reálné parametry $\mu_1, \dots, \mu_r$

- Obecně $e^{\mu_\alpha X_\alpha} e^{\mu_\beta X_\beta} \neq e^{\mu_\beta X_\beta} e^{\mu_\alpha X_\alpha}$

přesto však existují $\mu_1', \dots, \mu_r'$ (obecně různé od $\mu_1, \dots, \mu_r$) takové, že např. $\tilde{x} = e^{\mu_2' X_2} e^{\mu_1' X_1} \dots e^{\mu_r' X_r} x$

- navíc každý operátor $X = \sum_{\alpha=1}^{r} \sigma_\alpha X_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \xi^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$, kde $\xi^j(x) = \sum_{\alpha=1}^{r} \sigma_\alpha \xi^{\alpha j}(x)$

pro určité σ_α dává pomocí $\tilde{x} = e^{\varepsilon X} x$ jednopar. podgrupu LGT s identitou pro $\varepsilon = 0$ a skládáním $\phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

Pozn.: jako obvykle $e^{\mu_\alpha X_\alpha} = 1 + \mu_\alpha X_\alpha + \frac{\mu_\alpha^2}{2!} X_\alpha^2 + \dots$

- Všechny inf. generátory X tvoří vekt. prostor s bází X_α a definujeme-li komutátor

$$[X_\alpha, X_\beta] = X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \phi^j_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

kde

$$\phi^j_{\alpha\beta}(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[\xi^{\alpha i}(x) \frac{\partial \xi^{\beta j}(x)}{\partial x^i} - \xi^{\beta i}(x) \frac{\partial \xi^{\alpha j}(x)}{\partial x^i} \right]$$

dostaneme tzv. Lieovu algebru, neboť je splněno též

(**) $$[X_\alpha, X_\beta] = -[X_\beta, X_\alpha]; \quad [X_\alpha,[X_\beta,X_\gamma]] + [X_\beta,[X_\gamma,X_\alpha]] + [X_\gamma,[X_\alpha,X_\beta]] = 0$$

Jacobiho identita

Druhý Lieův zákl. teorém:

- Komutátor dvou infinit. operátorů r-par. LGT je též inf. operátor a lze psát $[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{r} c^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma$, kde $c^\gamma_{\alpha\beta}$ jsou strukturní konstanty

Třetí Lieův zákl. teorém:

- Vztahy pro strukturní konstanty $C^\gamma_{\alpha\beta}$ plynoucí z (**),

tj. $c^\gamma_{\alpha\beta} = -c^\gamma_{\beta\alpha}$ (antisymetričnost v α, β)

$$\sum_\varsigma \left(c^\sigma_{\alpha\varsigma} c^\varsigma_{\beta\gamma} + c^\sigma_{\beta\varsigma} c^\varsigma_{\gamma\alpha} + c^\sigma_{\gamma\varsigma} c^\varsigma_{\alpha\beta} \right) = 0 \quad \text{pro } \forall \sigma$$

(Jacobiho identita pro strukt. konstanty)

Podrobnosti viz např. S. Lie, J. Merker: Theory of Transformation Groups I ~~s komentářem~~ komentáře a překlad J. Merker (Springer 2015)

Př. Škálování

Uvažujme transformaci $\tilde{x} = ax$, $a \in (0,\infty)$ identita pro $a=1$
$\phi(a,b) = ba$

a tedy $\Xi(x) = \left.\frac{d\tilde{x}}{da}\right|_{a=1} = x$

$$\Theta(\varepsilon) = \left.\frac{\partial\phi}{\partial b}\right|_{\substack{b=1\\ a=\varepsilon}} = \varepsilon \quad , \quad \Psi(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial b}\right|_{(a,b)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)} = \varepsilon^{-1}$$

neboli $\tilde{x} = ax$ je ekvivalentní

$$\frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon} = \frac{\tilde{x}}{\varepsilon} \quad , \tilde{x}(1) = x \quad \Rightarrow \quad \tilde{x} = \varepsilon x$$

Parametrizací $\phi(\tau_1,\tau_2) = \tau_1 + \tau_2$, identita pro $\tau = 0$ dostaneme

$$\tau(\varepsilon) = \int_{\varepsilon'=1}^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon'}{\varepsilon'} = \ln\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = e^{\tau} \quad , \text{neboli} \quad \tilde{x} = e^{\tau} x$$

Inf. generátor škálování je $X = x\frac{\partial}{\partial x}$ $\Rightarrow$ $\tilde{x} = e^{\varepsilon X} x = x + \varepsilon x + \frac{\varepsilon^2}{2!} x + \ldots = e^{\varepsilon} x$

Př: lineární transformace

$\tilde{x} = a_1 x + a_2$ – 2-par. LGT, identita pro $(a_1,a_2) = (1,0)$

$$\phi(a,b) = (\underbrace{b_1 a_1}_{\phi_1(a,b)}, \underbrace{b_1 a_2 + b_2}_{\phi_2(a,b)})$$

inverzní prvek $(a_1,a_2)^{-1} = \left(\frac{1}{a_1}, -\frac{a_2}{a_1}\right)$

Nyní

$$\Xi(x) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial\tilde{x}}{\partial a_1}\right|_{(1,0)} \\ \left.\frac{\partial\tilde{x}}{\partial a_2}\right|_{(1,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \Theta(\varepsilon) = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial b_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial b_1} \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial b_2} & \frac{\partial\phi_2}{\partial b_2} \end{pmatrix}\right|_{(a,b)=(\varepsilon,(1,0))} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Psi(\varepsilon) = \Theta^{-1}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_1} & -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial b_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial b_1} \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial b_2} & \frac{\partial\phi_2}{\partial b_2} \end{pmatrix}\right|_{(a,b)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)}$$

a tedy $\tilde{x} = a_1 x + a_2$
je ekvivalentní řešení soustavy

$$(1) \quad \frac{\partial\tilde{x}}{\partial\varepsilon_1} = \frac{\tilde{x}}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \qquad \tilde{x} = x \text{ pro } \begin{matrix}\varepsilon_1 = 1\\ \varepsilon_2 = 0\end{matrix}$$

$$(2) \quad \frac{\partial\tilde{x}}{\partial\varepsilon_2} = 1$$

neboť z (2) máme
$\tilde{x} = \varepsilon_2 + f(\varepsilon_1)$
a dosazením do (1) dostaneme
$\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_1} = \frac{f(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1} \Rightarrow f = c\,\varepsilon_1$
a z $\tilde{x} = x$ pro $\varepsilon_1 = 1$ je $c = x$.

Infinitez. operátory $X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}$ (škálování)
$X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$ (translace)

Spočteme

$$\tilde{x} = e^{\mu_1 X_1} e^{\mu_2 X_2} x = \left| \begin{matrix} X_2 x = 1, & X_2^2 x = 0 \\ X_1 x = x, & X_1^k x = x \end{matrix} \right| = e^{\mu_1 X_1}(x + \mu_2) =$$

$$= x + \mu_2 + \mu_1 x + \frac{\mu_1^2}{2} x + \ldots = e^{\mu_1} x + \mu_2$$

avšak

$$\tilde{x} = e^{\mu_2' X_2} e^{\mu_1' X_1} x = e^{\mu_2' X_2}(e^{\mu_1'} x) = e^{\mu_1'}(x + \mu_2')$$

porovnáním
$\mu_1 = \mu_1'$
$\mu_2 = e^{\mu_1'}\mu_2'$

Př: Lorentzova transformace

$$\tilde{x} = \gamma(v)(x - vt) = F^x(x,t,v) \qquad \text{kde } \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$
$$\tilde{t} = \gamma(v)\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = F^t(x,t,v)$$

a identita nastává pro $v=0$

tvoří 1-par. LGT se skládáním parametrů

$$\phi(v_1, v_2) = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

- Podle Prvního Lieova zákl. teorému je tato transformace ekvivalentní soustavě

$$(\dagger) \qquad \frac{d\tilde{x}}{dv} = \gamma(v)^2(-\tilde{t}), \qquad \frac{d\tilde{t}}{dv} = \gamma(v)^2\left(-\frac{\tilde{x}}{c^2}\right)$$

s poč. podmínkou $\tilde{x} = x$, $\tilde{t} = t$ pro $v=0$

neboť $\Xi(x,t) = \left(\left.\frac{\partial F^x}{\partial v}\right|_{v=0}, \left.\frac{\partial F^t}{\partial v}\right|_{v=0} \right) = \left(-t, -\frac{x}{c^2}\right) \Longleftarrow \begin{cases} \frac{d\gamma(v)}{dv} = \frac{v}{c^2}\gamma(v)^3 \\ \quad = 0 \quad \text{pro } v=0 \\ \gamma(0) = 1 \end{cases}$

a dále $\theta(v) = \left.\frac{\partial\phi(v_1,v_2)}{\partial v_2}\right|_{(v_1,v_2)=(v,0)} = \frac{1}{\gamma(v)^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$

$$\Longleftarrow \frac{\partial\phi(v_1,v_2)}{\partial v_2} = \frac{1}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}} - \frac{(v_1+v_2)}{\left(1+\frac{v_1v_2}{c^2}\right)^2}\frac{v_1}{c^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \quad \text{pro } \begin{array}{l} v_1 = v \\ v_2 = 0 \end{array}$$

a tedy $\Psi(v) = \theta^{-1}(v) = \gamma(v)^2$

- Soustava $(\dagger)$ vskutku dává Lorentz. transf. (DÚ)

Chceme-li mít parametrizaci s bin. op. $\phi'(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

vezmeme $\varepsilon(v) = \int_{v'=0}^{v} \gamma(v')^2 dv' = c \operatorname{arctanh}\left(\frac{v}{c}\right)$ neboli $v = c\tanh\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)$

a dostáváme soustavu

$$\frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon} = -\tilde{t}, \qquad \frac{d\tilde{t}}{d\varepsilon} = -\frac{\tilde{x}}{c^2} \qquad \begin{array}{l} \tilde{x} = x \\ \tilde{t} = t \end{array} \text{ pro } \varepsilon = 0$$

která má řešení

$$\tilde{x} = x\cosh\frac{\varepsilon}{c} - ct\sinh\frac{\varepsilon}{c}$$
$$\tilde{t} = -\frac{x}{c}\sinh\frac{\varepsilon}{c} + t\cosh\frac{\varepsilon}{c}$$

- infinitezimální operátor $X = \xi^x(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^t(x,t)\frac{\partial}{\partial t} = -t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{x}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}$

a tedy

$$\tilde{x} = e^{\varepsilon X}x = x + \varepsilon(-t) + \frac{\varepsilon^2}{2!}\left(\frac{x}{c^2}\right) + \frac{\varepsilon^3}{3!}\left(-\frac{t}{c^2}\right) + \dots = x\cosh\frac{\varepsilon}{c} - ct\sinh\frac{\varepsilon}{c}$$
$$\tilde{t} = e^{\varepsilon X}t = t + \varepsilon\left(-\frac{x}{c^2}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2!}\left(\frac{t}{c^2}\right) + \dots = t\cosh\frac{\varepsilon}{c} - \frac{x}{c}\sinh\frac{\varepsilon}{c}$$

- mimochodem, složení dvou Lorentzových transformací vede na

$$\tilde{\tilde{x}} = \gamma(v_2)(\tilde{x} - v_2\tilde{t}) = \gamma(v_2)\gamma(v_1)\left[x\left(1+\frac{v_1v_2}{c^2}\right) - t(v_1+v_2)\right] = \gamma(v)\left[x - vt\right]$$

z čehož pro $v = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}$ plyne identita

$$\gamma(v_1)\gamma(v_2)\left(1+\frac{v_1v_2}{c^2}\right) = \gamma\left(\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}\right),$$

což vskutku platí. (ověřte za DÚ)