Lieovy základní teorémy

a) první Lieův zákl. teorém pro 1-par. LGT

- mějme 1-par. LGT $\tilde{x} = F(x,\varepsilon)$, kde $x=(x^1,\dots,x^n)$
  s operací skládání parametrů $\phi(\varepsilon,\delta)$
  odpovídající složení dvou transformací
$$\tilde{\tilde{x}} = F(\tilde{x},\delta) = F\big(F(x,\varepsilon),\delta\big) = F\big(x,\phi(\varepsilon,\delta)\big)$$
  s identitou pro $\varepsilon=e$ a inverzí pro ε^{-1}.
- dále nechť infinitezimální transformace je dána
$$\tilde{x} = x + \varepsilon\, \xi(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$
  je dána pomocí infinitezimál
$$\xi^j(x) = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=e} = \frac{\partial F^j(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=e}, \quad j=1,\dots,n$$
  a označme
$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{\partial\phi(a,b)}{\partial b}\Big|_{(a,b)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)}$$
- pak v okolí identity e jsou transformace $\tilde{x}=F(x,\varepsilon)$ ekvivalentní řešení systému obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu
$$\boxed{\frac{d\tilde{x}^i}{d\varepsilon} = \Gamma(\varepsilon)\,\xi^i(\tilde{x})}$$
  s počáteční podmínkou $\tilde{x}=x$ pro $\varepsilon=e$.

Důkaz:
- vyjdeme ze vztahu (platného obecně i pro víceparam. LGT)

(*) $$F(x,\varepsilon+\delta) = F\big(F(x,\varepsilon),\ \phi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\delta)\big)$$
  který platí díky asociativitě $\phi(\varepsilon,\phi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\delta)) = \phi(\underbrace{\phi(\varepsilon,\varepsilon^{-1})}_{e},\varepsilon+\delta)$
- Taylorův rozvoj (*) v δ okolo $\delta=0$ dá:

  levá strana:
$$F(x,\varepsilon+\delta) = F(x,\varepsilon) + \frac{\partial F(x,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\delta + \mathcal{O}(\delta^2) = \tilde{x} + \frac{d\tilde{x}(\varepsilon)}{d\varepsilon}\delta + \mathcal{O}(\delta^2)$$
  pravá strana:
$$F\Big(\tilde{x}(\varepsilon),\ \underbrace{\phi(\varepsilon^{-1},\varepsilon)}_{e} + \overbrace{\frac{\partial\phi(a,b)}{\partial b}\Big|_{(a,b)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)}}^{\Gamma(\varepsilon)}\delta + \mathcal{O}(\delta^2)\Big) =$$
$$= F(\tilde{x},\varepsilon) + \underbrace{\frac{\partial F(\tilde{x},\gamma)}{\partial\gamma}\Big|_{\gamma=e}}_{}\Gamma(\varepsilon)\,\delta + \mathcal{O}(\delta^2) =$$
$$= \tilde{x}(\varepsilon) + \Gamma(\varepsilon)\,\xi(\tilde{x})\,\delta + \mathcal{O}(\delta^2)$$

• porovnáním dostáváme

$$\frac{d\tilde{x}(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \Gamma(\varepsilon)\, \xi(\tilde{x}(\varepsilon))$$

s počáteční podmínkou $\tilde{x}(\varepsilon = e) = F(x, e) = x$

Pozn: v případě 1-par. LGT je možná reparametrizace $\tau(\varepsilon)$ taková, aby operace $\phi_\tau(\tau_1, \tau_2) = \tau_1 + \tau_2$

neboli pak $\Gamma_\tau(\varepsilon) = \frac{\partial \phi_\tau(a,b)}{\partial b}\Big|_{(a,b)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)} = 1$

a tedy $\frac{d\tilde{x}'(\tau)}{d\tau} = \xi(\tilde{x}'(\tau))$ s $\tilde{x}'(0) = x$

neboť $\frac{d\tilde{x}'(\tau)}{d\tau} = \frac{d\tilde{x}(\varepsilon(\tau))}{d\tau} = \frac{d\tilde{x}(\varepsilon)}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} = \Gamma(\varepsilon)\,\xi(\tilde{x}(\varepsilon))\frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}$

neboli musí být $\Gamma(\varepsilon)\frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} = 1$

a díky derivaci inverzní funkce dostáváme

$$\frac{d\tau(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \Gamma(\varepsilon)$$

s poč. podmínkou $\tau(e) = 0$ (chceme oper. sčítání)

reparametrizujeme tedy pomocí

$$\tau(\varepsilon) = \int_e^\varepsilon \Gamma(\varepsilon')\, d\varepsilon'$$

- formulace pomocí infinitezimálního generátoru

• definujeme inf. generátor 1-par. LGT s operací skládání $\phi(\varepsilon,\delta) = \varepsilon + \delta$

$$\tilde{x} = F(x,\varepsilon) = x + \varepsilon\,\xi(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

jako diferenciální operátor

$$X = \xi(x)\cdot\nabla = \sum_{i=1}^n \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \text{kde } \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$$

• pak $\tilde{x} = F(x,\varepsilon)$ je na okolí identity ekvivalentní

$$\tilde{x} = e^{\varepsilon X}x = x + \varepsilon X x + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 X^2 x + \dots = \sum_{k=0}^\infty \frac{\varepsilon^k}{k!}X^k x$$

Důkaz: obecně pro lib. diferencovatelnou funkci $G(x) = G(x^1,\dots,x^n)$

máme $\frac{dG(\tilde{x})}{d\varepsilon} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial G(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^i}\frac{d\tilde{x}^i}{d\varepsilon} = \sum_{i=1}^n \xi^i(\tilde{x})\frac{\partial G(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^i} = X(\tilde{x})\,G(\tilde{x})$

díky $\phi(\varepsilon,\delta) = \varepsilon + \delta$, viz 1. LZT

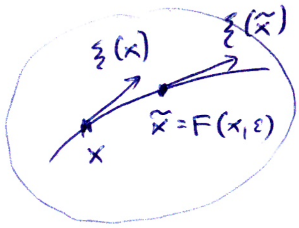
neboli $\frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon} = X(\tilde{x})\,\tilde{x}$ a také $\frac{d^2\tilde{x}}{d\varepsilon^2} = \frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon}\right) = X^2(\tilde{x})\,\tilde{x}$

a obecně $\frac{d^k\tilde{x}}{d\varepsilon^k} = X^k(\tilde{x})\,\tilde{x}$. A odtud $\frac{d^k\tilde{x}}{d\varepsilon^k}\Big|_{\varepsilon=0} = X^k(x)\,x$

dosazením do Taylorova rozvoje dostaneme

$$\tilde{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \frac{d^k \tilde{x}}{d\varepsilon^k}\Big|_{\varepsilon=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} X^k(x)\, x = e^{\varepsilon X} x \qquad \text{c.b.d.}$$

Pozn: obecně máme



$$\xi(x) = \frac{\partial F(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=e}$$

$$\xi(\tilde{x}) = \frac{\partial F(\tilde{x},\delta)}{\partial \delta}\Big|_{\delta=e} = \frac{\partial F(x,\phi(\varepsilon,\delta))}{\partial \delta}\Big|_{\delta=e} =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial F(x,z)}{\partial z}\Big|_{z=\varepsilon}}_{\frac{d\tilde{x}(\varepsilon)}{d\varepsilon}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \phi(\varepsilon,\delta)}{\partial \delta}\Big|_{\delta=e}}_{\Theta(\varepsilon)} =$$

$$= \frac{d\tilde{x}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \cdot \Theta(\varepsilon)$$

a tedy musí platit $\quad \Theta(\varepsilon) = \Gamma(\varepsilon)^{-1}$

---

b) <u>první Lieův zákl. teorém pro r-par. LGT</u>

- pokud nyní $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$, pak máme r analytických funkcí

$$\phi(\varepsilon,\delta) = (\phi_1(\varepsilon,\delta), \dots, \phi_r(\varepsilon,\delta))$$

a místo jedné funkce $\Gamma(\varepsilon)$ máme matici $r \times r$ $\Psi(\varepsilon)$ s prvky

$$\Psi^{\alpha}{}_{\beta}(\varepsilon) = \frac{\partial \phi_\beta(a,b)}{\partial b_\alpha}\Big|_{(a,b)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)}$$

a místo vektoru $\xi(x)$ máme infinitezimální matici $\Xi(x)$ s prvky

$$\xi^{\alpha j}(x) = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial \varepsilon_\alpha}\Big|_{\varepsilon=e} = \frac{\partial F^j(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_\alpha}\Big|_{\varepsilon=e}$$

a transformace $\tilde{x} = F(x,\varepsilon)$ jsou na jistém okolí identity e ekvivalentní řešení systému r·n parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial \varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial \varepsilon_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial \varepsilon_r} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial \varepsilon_r} \end{pmatrix} = \Psi(\varepsilon)\, \Xi(\tilde{x})$$

s počáteční podmínkou $\tilde{x} = x$ pro $\varepsilon = e$

Pozn: i zde platí, že $\Psi(\varepsilon) = \Theta(\varepsilon)^{-1}$, kde $\Theta^{\alpha}{}_{\beta}(\varepsilon) = \frac{\partial \phi_\beta(a,b)}{\partial b_\alpha}\Big|_{(a,b)=(\varepsilon,e)}$

Důkaz: opět Taylorovým rozvojem

$$F(x, \varepsilon+\delta) = F(F(x,\varepsilon), \phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon+\delta))$$

kde nyní $\phi_\beta(\varepsilon^{-1}, \varepsilon+\delta) = \underbrace{\phi_\beta(\varepsilon^{-1}, \varepsilon)}_{e_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{r} \underbrace{\left.\frac{\partial \phi_\beta(a,b)}{\partial b_\alpha}\right|_{(a,b)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)}}_{\Psi^\alpha{}_\beta(\varepsilon)} \cdot \delta_\alpha + \mathcal{O}(\delta^2)$

a tedy pravá strana je

$$F^i(\tilde{x}(\varepsilon), \phi(\varepsilon^{-1}, \varepsilon+\delta)) =$$

$$= \tilde{x}^i(\varepsilon) + \sum_{\beta=1}^{r} \underbrace{\left.\frac{\partial F^i(\tilde{x}(\varepsilon), \gamma)}{\partial \gamma_\beta}\right|_{\gamma=e}}_{\xi^{\beta i}(\tilde{x}(\varepsilon))} \cdot \sum_{\alpha=1}^{r} \Psi^\alpha{}_\beta(\varepsilon)\, \delta_\alpha + \mathcal{O}(\delta^2)$$

$$= \tilde{x}^i(\varepsilon) + \sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{\beta=1}^{r} \Psi^\alpha{}_\beta(\varepsilon)\, \xi^{\beta i}(\tilde{x}(\varepsilon))\, \delta_\alpha + \mathcal{O}(\delta^2)$$

levá strana pak dá

$$F^i(x, \varepsilon+\delta) = \underbrace{F^i(x,\varepsilon)}_{\tilde{x}^i(\varepsilon)} + \sum_{\alpha=1}^{r} \underbrace{\frac{\partial F^i(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_\alpha}}_{\frac{\partial \tilde{x}^i(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_\alpha}} \cdot \delta_\alpha + \mathcal{O}(\delta^2)$$

a porovnáním členů u δ_α dostáváme

$$\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial \varepsilon_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{r} \Psi^\alpha{}_\beta(\varepsilon)\, \xi^{\beta i}(\tilde{x}(\varepsilon)) \qquad \text{c.b.d.}$$

Pozn: zároveň ale můžeme psát

$$\xi^{\beta j}(\tilde{x}) = \left.\frac{\partial F^j(\tilde{x}, \delta)}{\partial \delta_\beta}\right|_{\delta=e} = \left.\frac{\partial F^j(x, \phi(\varepsilon,\delta))}{\partial \delta_\beta}\right|_{\delta=e} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{r} \underbrace{\left.\frac{\partial F^j(x,z)}{\partial z_\alpha}\right|_{z=\varepsilon}}_{\frac{\partial \tilde{x}^j(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_\alpha}} \underbrace{\left.\frac{\partial \phi_\alpha(\varepsilon,\delta)}{\partial \delta_\beta}\right|_{\delta=e}}_{\Theta^\beta{}_\alpha(\varepsilon)}$$

a tedy musí být $\Theta^{-1}(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon)$