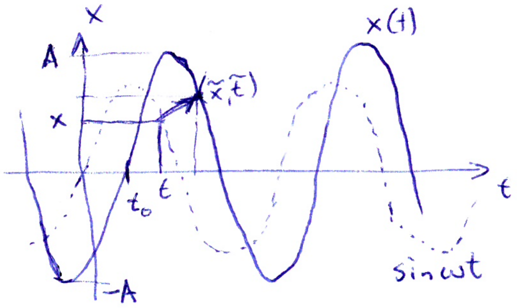
Symetrie rovnic matematické fyziky a zákony zachování

- úvodní poznámky:
  - na webové stránce utf.mff.cuni.cz/~houfek/grupy/NTMF064.htm najdete podrobné informace o přednášce
  - doporučenou literaturu si můžete stáhnout z adresy …/~houfek/esourcesXX, kde XX je číslo 04, případně jiný (ne nutně aktuální) měsíc

- motivace:

lineární harmonický oscilátor v klasické mechanice popsaný ODR



(1) $\quad m\ddot{x} = -kx$, kde $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$

neboli $\quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

má obecné řešení

(2) $\quad x(t) = A \sin\omega(t-t_0)$

kde A a t_0 jsou integrační konstanty.

Toto řešení dostaneme ze základního řešení $\sin\omega t$ posunutím v čase a škálováním v x, tedy pomocí transformací

(3) $$t \mapsto \tilde{t} = t + t_0$$
$$x \mapsto \tilde{x} = Ax$$

(obecně tato transformace převádí lib. řešení $x = f(t)$ rovnice (1) na nové řešení (zapsané v původních souřadnicích) $x = Af(t-t_0)$)

To, že transformace (3) převádí řešení na řešení téže rovnice souvisí s tím, že jde ve skutečnosti o tzv. bodovou symetrii této rovnice, která ponechává nezměněnou celou rovnici při přechodu k novým proměnným $\tilde{x}, \tilde{t}$ (neboť $\ddot{x} = \frac{1}{A}\ddot{\tilde{x}} = -\omega^2 \frac{\tilde{x}}{A}$).

Jde o dvouparametrickou Lieovu grupu transformací, neboť složením dvou transf. typu (3) dostaneme opět transf. typu (3) a existuje inverzní transformace (s par. $-t_0, \frac{1}{A}$) a identita $(0,1)$.

Mluvíme pak o grupě (bodových) symetrií dané rovnice, i když nemusí být nutně maximální. V případě rovnice (1) existuje větší 8-parametrická Lieova grupa bod. symetrií.

- cílem přednášky bude naučit se algoritmicky hledat takové (spojité) symetrie obecně systému parciálních diferenciálních rovnic (PDR), ovšem nebudeme vždy schopni vyjádřit tyto transformace v „globálním“ tvaru jako v (3), ale budeme hledat spíše tzv. infinitezimální transformace typu
$$\tilde{x} = x + \varepsilon \eta(t,x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$
$$\tilde{t} = t + \varepsilon \xi(t,x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$
kde ε je malý parametr.

- též si ukážeme, že pokud známe nějakou bod. symetrii určité rovnice, jak ji lze využít při hledání řešení dané rovnice, případně jak zkonstruovat příslušný zákon zachování, pokud existuje.

- a také si ukážeme, jak naopak hledat rovnice pro zadanou grupu symetrie, např. pro 2-par. Lieovu grupu (3) bychom jako obecnou ODR 2. řádu invariantní při (3) dostali
$$\ddot{x} = x\, f\left(\frac{\dot{x}}{x}\right)$$
kde f je libovolná fce svého argumentu.
(pro volbu $f = -\omega^2$ máme rovnici (1))

Obecná transformace funkcí při bodových transformacích

- uvažujme vektorovou funkci $u(x) = (u^1(x), u^2(x), \dots, u^m(x))$ závislou na nezávislých proměnných $x = (x^1, \dots, x^n)$
- nechť

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= F(x,u) \\ \tilde{u} &= G(x,u) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= F^{-1}(\tilde{x},\tilde{u}) \\ \tilde{u} &= G^{-1}(\tilde{x},\tilde{u}) \end{aligned}$$

je lib. bodová transformace a k ní inverzní transformace

(pozn.: F^{-1} je jen označení inv. transf., ne matem. operace)

pak se $u = \Theta(x)$ transformuje do nových proměnných $(\tilde{x},\tilde{u})$ pomocí

$$\tilde{u} = G(x, \Theta(x)) = G\left(F^{-1}(\tilde{x},\tilde{u}), \Theta(F^{-1}(\tilde{x},\tilde{u}))\right)$$

což je implicitní vyjádření nové funkce $\tilde{u} = \tilde{\Theta}(\tilde{x})$.

- protože obvykle budeme pracovat s Lieovými grupami transformací závislými na parametrech ε a inverzní transf. pak budou dány pomocí sady parametrů ε^{-1} a stejnými funkcemi F a G, tj. $F^{-1}(\tilde{x},\tilde{u}) = F(\tilde{x},\tilde{u},\varepsilon^{-1})$, budeme v tomto případě psát

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= F(x,u,\varepsilon) \\ \tilde{u} &= G(x,u,\varepsilon) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= F(\tilde{x},\tilde{u},\varepsilon^{-1}) \\ u &= G(\tilde{x},\tilde{u},\varepsilon^{-1}) \end{aligned}$$

a máme

$$\boxed{\tilde{u} = G\left(F(\tilde{x},\tilde{u},\varepsilon^{-1}), \Theta(F(\tilde{x},\tilde{u},\varepsilon^{-1})), \varepsilon\right)}$$

Př. pro lin. harm. oscilátor jsme měli 2-par. grupu

$F(t,x,t_0,A) = \tilde{t} = t + t_0$ ← nezávislá proměnná (výše x) $\quad \varepsilon = (t_0, A)$

$G(t,x,t_0,A) = \tilde{x} = Ax$ ← závislá proměnná (výše u) $\quad \varepsilon^{-1} = (-t_0, \frac{1}{A})$

a obecné řešení $x = f(t)$ se transformuje na

$$\tilde{x} = Af(t) = Af(\tilde{t} - t_0) = \tilde{f}(\tilde{t})$$

což, jak bylo uvedeno výše, je opět řešení pro lin. harm. osc.

Př. později si ukážeme, že rovnice vedení tepla $u_{xx} = u_t$ je invariantní při transf. (1-par. LGT) (zde $\varepsilon^{-1} = -\varepsilon$)

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + 2t\varepsilon \\ \tilde{t} &= t \\ \tilde{u} &= u\, e^{-x\varepsilon - t\varepsilon^2} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= \tilde{x} - 2\tilde{t}\varepsilon \\ t &= \tilde{t} \\ u &= \tilde{u}\, e^{\tilde{x}\varepsilon - \tilde{t}\varepsilon^2} \end{aligned}$$

při této transformaci se lib. řešení $u = \theta(x,t)$ transformuje na nové řešení rovnice vedení tepla dané vztahem

$$\tilde{u} = \theta(x,t)\, e^{-x\varepsilon - t\varepsilon^2} =$$
$$= \theta(\tilde{x} - 2\tilde{t}\varepsilon, \tilde{t})\, e^{-(\tilde{x}-2\tilde{t}\varepsilon)\varepsilon - \tilde{t}\varepsilon^2} =$$
$$= \theta(\tilde{x} - 2\tilde{t}\varepsilon, \tilde{t})\, e^{-\tilde{x}\varepsilon + \tilde{t}\varepsilon^2}$$

např. volbou $\theta(x,t) = A = \text{konst}$, což je určitě řešení rce vedení tepla dostaneme nové netriviální řešení (po odvlnkování)

$$u(x,t) = A\, e^{-x\varepsilon + t\varepsilon^2}$$

což si můžete ověřit přímým dosazením do $u_{xx} = u_t$.

Obecné transformace derivací při bodových transformacích

- pokud chceme určitý systém PDR (N je počet rovnic)

$$R^\sigma(x, u, \partial u, \dots \partial^k u) = 0 \quad , \quad \sigma = 1, \dots, N,$$

kde opět $x = (x^1, \dots, x^n)$ jsou nezávislé proměnné

$u = (u^1, \dots, u^m)$ jsou závislé proměnné

a $\partial u, \dots, \partial^k u$ značí všechny první, ..., k-té derivace všech u podle všech x, tj. $\frac{\partial u^\mu}{\partial x^i}, \dots, \frac{\partial^k u^\mu}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}$

převést do nových proměnných pomocí bodové transformace

$$\tilde{x}^i = F^i(x,u) \quad , \quad \tilde{u}^\mu = G^\mu(x,u), \qquad (*)$$

musíme nejprve vědět, jak tuto transformaci rozšířit (prodloužit) do prostoru derivací, tj. najít výrazy

$$\frac{\partial \tilde{u}^\mu}{\partial \tilde{x}^i} \equiv \tilde{u}^\mu_i = H^\mu_i(x, u, \partial u)$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial^k \tilde{u}^\mu}{\partial \tilde{x}^{i_1} \dots \partial \tilde{x}^{i_p}} \equiv \tilde{u}^\mu_{i_1 \dots i_p} = H^\mu_{i_1 \dots i_p}(x, u, \partial u, \dots, \partial^p u)$$

- to lze provést porovnáním úplných diferenciálů $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{x})$ a transformačních vztahů $(*)$

k zápisu těchto diferenciálů použijeme operátor úplné derivace podle x^i

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_\mu u^\mu_i \frac{\partial}{\partial u^\mu} + \sum_{\mu, j} u^\mu_{ij} \frac{\partial}{\partial u^\mu_j} + \dots$$

který „proderivovává" podle x^i včetně závislosti na závislých proměnných.

- pomocí tohoto operátoru můžeme psát

$$d\tilde{u}^{\mu} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{j}} d\tilde{x}^{j} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{u}^{\mu}_{j} d\tilde{x}^{j} \quad \leftarrow \text{diferenciál } \tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{x})$$

$$d\tilde{u}^{\mu} = \sum_{k=1}^{n} (D_k G^{\mu}) dx^{k} \quad \leftarrow \text{diferenciál } \tilde{u} = G(x,u)$$

$$d\tilde{x}^{j} = \sum_{k=1}^{n} (D_k F^{j}) dx^{k} \quad \leftarrow \text{diferenciál } \tilde{x} = F(x,u)$$

dosazení za $d\tilde{x}^{j}$ do první rovnice a porovnání s druhou (rovnost musí platit pro lib. dx^k) nakonec dostaneme soustavu rovnic $\boxed{\sum_{j=1}^{n} (D_k F^{j}) \tilde{u}^{\mu}_{j} = D_k G^{\mu}}$ pro $k = 1, \dots, n$

pro neznámé derivace $\tilde{u}^{\mu}_{j}$. Řešení lze vyjádřit jako

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}^{\mu}_{1} \\ \vdots \\ \tilde{u}^{\mu}_{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^{\mu}_{1}(x,u,\partial u) \\ \vdots \\ H^{\mu}_{n}(x,u,\partial u) \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} D_1 G^{\mu} \\ \vdots \\ D_n G^{\mu} \end{pmatrix}, \text{ kde } A = \begin{pmatrix} D_1 F^1 & \dots & D_1 F^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n F^1 & \dots & D_n F^n \end{pmatrix}$$

- máme-li první derivace, můžeme obdobně počítat druhé, a z nich pak rekurzivně vyšší derivace s tím, že v každém kroku použijeme místo diferenciálu fce $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{x})$, diferenciály derivací, např. $d\tilde{u}^{\mu}_{i_1 \dots i_p} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{u}^{\mu}_{i_1 \dots i_p j} d\tilde{x}^{j}$

  a místo diferenciálu fce $\tilde{u} = G(x,u)$ diferenciály funkcí $H^{\mu}_{i}, \dots, H^{\mu}_{i_1 \dots i_p}$, tj. $d\tilde{u}^{\mu}_{i_1 \dots i_p} = \sum_{k=1}^{n} (D_k H^{\mu}_{i_1 \dots i_p}) dx^{k}$

- opět dostaneme soustavu n lineárních rovnic

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} (D_k F^{j}) \tilde{u}^{\mu}_{i_1 \dots i_p j} = D_k H^{\mu}_{i_1 \dots i_p}}$$

jejíž řešení je

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}^{\mu}_{i_1 \dots i_p 1} \\ \vdots \\ \tilde{u}^{\mu}_{i_1 \dots i_p n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^{\mu}_{i_1 \dots i_p 1} \\ \vdots \\ H^{\mu}_{i_1 \dots i_p n} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} D_1 H^{\mu}_{i_1 \dots i_p} \\ \vdots \\ D_n H^{\mu}_{i_1 \dots i_p} \end{pmatrix}, \text{ kde } A \text{ je stejná jako výše}$$

- pro efektivní převedení jistých rovnic do nových souřadnic $(\tilde{x}, \tilde{u})$ je vhodné hledat přímo inverzní transformace, tj. $u^{\mu}_{i} = \overset{-1}{H}{}^{\mu}_{i}(\tilde{x}, \tilde{u}, \partial\tilde{u})$ atd. i když u Lieových grup jsou opět dány pomocí H^{μ}_{i} s parametry ε^{-1}.

Př.: Mějme ODR $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$. Ukažte, že je invariantní při rotaci prostoru (x,y), tj. při transformacích

$$\tilde{x} = x\cos\varphi - y\sin\varphi = F(x,y,\varepsilon)$$
$$\tilde{y} = x\sin\varphi + y\cos\varphi = G(x,y,\varepsilon)$$

tj. $x^1 = x$, $u^1 = y$

pro inverzní transf. dostaneme ($\varphi \to -\varphi$)

$$x = \tilde{x}\cos\varphi + \tilde{y}\sin\varphi = F(\tilde{x},\tilde{y},-\varphi)$$
$$y = -\tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi = G(\tilde{x},\tilde{y},-\varphi)$$

odtud
$$\frac{dy}{dx} = \frac{D_{\tilde{x}}G}{D_{\tilde{x}}F} = \frac{-\sin\varphi + \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}\cos\varphi}{\cos\varphi + \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}\sin\varphi}$$

a dosazení do $0 = (x-y)\frac{dy}{dx} - (x+y) = \dots = (\tilde{x}-\tilde{y})\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} - (\tilde{x}+\tilde{y})$

$$0 = \left[(\tilde{x}-\tilde{y})\cos\varphi + (\tilde{y}+\tilde{x})\sin\varphi\right]\frac{\left(-\sin\varphi + \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}\cos\varphi\right)}{\cos\varphi + \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}\sin\varphi} - (\tilde{x}+\tilde{y})\cos\varphi + (\tilde{x}-\tilde{y})\sin\varphi$$

$$0 = (\tilde{x}+\tilde{y})\overbrace{(-\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)}^{-1} + (\tilde{x}-\tilde{y})(\cancel{-\sin\varphi\cos\varphi} + \cancel{\sin\varphi\cos\varphi}) +$$
$$+ \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}\left[\cancel{(\tilde{x}+\tilde{y})}(\cancel{\sin\varphi\cos\varphi} - \cancel{\sin\varphi\cos\varphi}) + (\tilde{x}-\tilde{y})\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1}\right] = (\tilde{x}-\tilde{y})\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} - (\tilde{x}+\tilde{y})$$

Př. Ukažte, že rce vedení tepla $u_{xx} = u_t$ je inv. při transf.

$$\tilde{x} = 2t\varepsilon + x = F^x$$
$$\tilde{t} = t = F^t$$
$$\tilde{u} = u\, e^{-x\varepsilon - t\varepsilon^2} = G$$

inverzní tr. je
$$x = \tilde{x} - 2\varepsilon\tilde{t}$$
$$t = \tilde{t}$$
$$u = \tilde{u}\, e^{\tilde{x}\varepsilon - \tilde{t}\varepsilon^2}$$

$$A = \begin{pmatrix} D_{\tilde{x}}F^x & D_{\tilde{x}}F^t \\ D_{\tilde{t}}F^x & D_{\tilde{t}}F^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +2\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

odtud
$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_x(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{u},\tilde{u}_{\tilde{x}},\tilde{u}_{\tilde{t}}) \\ H_t(\text{---} \;\; \text{''} \text{---}) \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} D_{\tilde{x}}G \\ D_{\tilde{t}}G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +2\varepsilon & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\cdots}[\varepsilon\tilde{u} + \tilde{u}_{\tilde{x}}] \\ e^{\cdots}[-\varepsilon^2\tilde{u} + \tilde{u}_{\tilde{t}}] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\cdots}[\varepsilon\tilde{u} + \tilde{u}_{\tilde{x}}] \\ e^{\cdots}[+2\varepsilon^2\tilde{u} + 2\varepsilon\tilde{u}_{\tilde{x}} - \varepsilon^2\tilde{u} + \tilde{u}_{\tilde{t}}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\cdots}[\varepsilon\tilde{u} + \tilde{u}_{\tilde{x}}] \\ e^{\cdots}[\varepsilon^2\tilde{u} + 2\varepsilon\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{t}}] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{xx} \\ u_{xt} \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} D_{\tilde{x}}H_x \\ D_{\tilde{t}}H_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +2\varepsilon & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\cdots}[\varepsilon^2\tilde{u} + \varepsilon\tilde{u}_{\tilde{x}} + \varepsilon\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}] \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$u_{xx} = e^{\cdots}[\cancel{\varepsilon^2\tilde{u}} + \cancel{2\varepsilon\tilde{u}_{\tilde{x}}} + \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}] = e^{\cdots}[\cancel{\varepsilon^2\tilde{u}} + \cancel{2\varepsilon\tilde{u}_{\tilde{x}}} + \tilde{u}_{\tilde{t}}] = u_t$$

a tedy z $u_{xx} = u_t$ plyne
$$\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} = \tilde{u}_{\tilde{t}}$$

Plyne z obecného tvrzení, že $(1+B)^{-1} = (1-B)$ pokud $B^2 = 0$

neboť $(1+B)(1-B) = 1 - B^2 = 1$

zde $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2\varepsilon & 0 \end{pmatrix}$ a $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Př. LHO $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ $\quad \tilde{t} = t + \beta$, $\tilde{x} = \alpha x$

$F \Rightarrow t = \tilde{t} - \beta$, $x = \frac{1}{\alpha}\tilde{x} = G$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{D_{\tilde{t}}G}{D_{\tilde{t}}F} = \frac{\frac{1}{\alpha}\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}}{1}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{t}^2} \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\frac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{t}^2} + \omega^2\frac{\tilde{x}}{\alpha} = 0 = \ddot{\tilde{x}} + \omega^2\tilde{x}$$

Lokální Lieova grupa transformací

Olver: J Lie Theory 1996 vol. 6, 23

Def: r-parametrická lokální Lieova grupa je souvislá otevřená podmnožina $V \subset \mathbb{R}^r$ (BÚNO můžeme předpokládat, že obsahuje ~~počátek 0~~ obecně identitu e), na které je definována binární operace, tj. je dáno zobrazení $\phi : V \times V \to \mathbb{R}^r$, které je hladké (analytické) a na jejíž otevřené podmnožině $V_0 \subset V$ je dále definováno hladké (analytické) zobrazení $i : V_0 \to V$ splňující následující axiomy:

1) pokud $\varepsilon, \delta, \gamma \in V$ a $\phi(\varepsilon, \delta)$ a $\phi(\delta, \gamma) \in V$, pak
$$\phi(\varepsilon, \phi(\delta, \gamma)) = \phi(\phi(\varepsilon, \delta), \gamma) \quad \text{(asociativita)}$$

2) $\exists e \in V$: pro $\forall \varepsilon \in V$ platí: $\phi(e, \varepsilon) = \varepsilon = \phi(\varepsilon, e)$ (e je nulový prvek, identita) (může být i jiný než 0)

3) pro $\forall \varepsilon \in V_0$ platí: $\phi(\varepsilon, i(\varepsilon)) = \phi(i(\varepsilon), \varepsilon) = e$ (tj. pro prvky z V_0 existují ve V inverzní prvky)

Jinými slovy: Grupové axiomy jsou splněny dostatečně blízko u jednotkového (nulového) prvku.

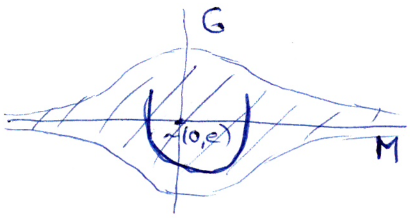
Př. lokální LG, která není globální:

$V = \{\varepsilon, |\varepsilon| < 1\} \subset \mathbb{R}$ a $V_0 = \{\varepsilon, |\varepsilon| < \frac{1}{3}\} \subset V$ (ne $\frac{1}{2}$, ale $\frac{1}{3}$, aby $i(\varepsilon)$ zobrazovalo do V)

a ϕ a i jsou dány vztahy
$$\phi(\varepsilon, \delta) = \frac{2\varepsilon\delta - \varepsilon - \delta}{\varepsilon\delta - 1} \quad \text{pro } \varepsilon, \delta \in V$$
$$i(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2\varepsilon - 1} \quad \text{pro } \varepsilon \in V_0$$

Def: Nechť M je hladká varieta. (pro nás prostor závislých a nezávislých prom.) Lokální r-par. Lieova grupa transformací působící na M je dána lokální Lieovou grupou G, otevřenou množinou U: $M \times \{e\} \subset U \subset M \times G$, což je definiční obor působení G na M, a dále hladkým (analytickým) zobrazením $F : U \to M$ splňujícím:

1) pokud $(x, \varepsilon) \in U$, $(F(x, \varepsilon), \delta) \in U$ a $(x, \phi(\varepsilon, \delta)) \in U$, pak $F(F(x, \varepsilon), \delta) = F(x, \phi(\varepsilon, \delta))$



2) pro $\forall x \in M$: $F(x, e) = x$

3) pokud $(x, \varepsilon) \in U$, pak $(F(x, \varepsilon), \varepsilon^{-1}) \in U$ a $F(F(x, \varepsilon), \varepsilon^{-1}) = x$

(poslední axiom neplyne z 1) a 2), kvůli definičnímu oboru)

Př.: lokální LGT, které jsou i globální LGT

1) translace v $\mathbb{R}^n$ - n-parametrická LGT, pro kterou $G = \mathbb{R}^n = M$

$$\tilde{x} = F(x,a) = x + a, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad a \in \mathbb{R}^n$$

2) škálování - jedno-, či víceparametrická LGT

obecně 1-par. LGT v $\mathbb{R}^n$ lze psát jako

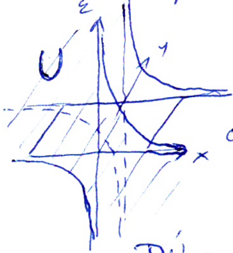
$$\tilde{x} = F(x,\underbrace{\lambda}_{\text{škálovací par.}}) = (\lambda^{\alpha_1}x_1, \lambda^{\alpha_2}x_2, \dots, \lambda^{\alpha_n}x_n) \quad \text{pro fixní } \alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$$

kde $M = \mathbb{R}^n$ a $G = (\mathbb{R}^+, \cdot)$ (zde není $e \leftrightarrow 0$, ale 1)

3) rotace - např. $M = \mathbb{R}^2$, $G = S^1$ = kružnice

$\Rightarrow$ 1-par. LGT roviny

Př. - ryze lokální LGT - projektivní zobrazení $M = \mathbb{R}^2$ s $G = (\mathbb{R}, +)$



$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = F((x,y),\varepsilon) = \left(\frac{x}{1-\varepsilon x}, \frac{y}{1-\varepsilon x}\right) = (F^x(x,y;\varepsilon), F^y(x,y;\varepsilon))$$

definované na $U = \{((x,y),\varepsilon) : \varepsilon < \frac{1}{x} \text{ pro } x > 0 \text{ a } \varepsilon > \frac{1}{x} \text{ pro } x < 0\} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$

DÚ: ověřit, že platí $F(F((x,y),\varepsilon),\delta) = F((x,y),\varepsilon+\delta)$

a tedy inverzní transformaci dostaneme záměnou $\varepsilon \to -\varepsilon$

- jde o zobrazení, které převádí přímku na přímku a uvidíme později, že jde tedy o jednu ze symetrií rovnice $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

uvažujme funkci $y = \theta(x) = kx + c$ (obecná přímka v (x,y)), pomocí projektivní transformace dostaneme novou funkci danou implicitně

$$\tilde{y} = F^y(F^x(\tilde{x},\tilde{y},-\varepsilon), \theta(F^x(\tilde{x},\tilde{y},-\varepsilon)), \varepsilon)$$

ovšem pro přímku dostaneme jednoduše

$$\tilde{y} = F^y\left(\frac{\tilde{x}}{1+\varepsilon\tilde{x}}, \theta\left(\frac{\tilde{x}}{1+\varepsilon\tilde{x}}\right), \varepsilon\right) = \frac{k\frac{\tilde{x}}{1+\varepsilon\tilde{x}} + c}{1 - \varepsilon\frac{\tilde{x}}{1+\varepsilon\tilde{x}}} = (k + c\varepsilon)\tilde{x} + c$$

- Lze ukázat, že pro souvislou LG lze každý prvek vyjádřit jako součin prvků z okolí identity, proto je mnohdy postačující zabývat se pouze tzv. <u>infinitezimálními transformacemi</u>
- díky analytičnosti můžeme udělat Taylorův rozvoj (v okolí identity)

$$\tilde{x}^j = x^j + \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \xi^{\alpha j}(x) + O(\varepsilon^2)$$

kde

$$\xi^{\alpha j}(x) = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial \varepsilon_\alpha}\bigg|_{\varepsilon = e} = \frac{\partial F^j(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_\alpha}\bigg|_{\varepsilon = e} \quad \left(\begin{array}{l}\text{obecněji bychom}\\ \text{derivovali v } \varepsilon \leftrightarrow e\end{array}\right)$$

- pro 1-param. LGT (příp. podgrupy nějaké víceparam. LGT) bude jednoduše

$$\tilde{x}^j = x^j + \varepsilon\xi^j(x) + O(\varepsilon^2), \quad \text{kde} \quad \xi^j(x) = \frac{\partial F^j(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}$$

Lieovy teorémy

- aniž bychom zacházeli do detailů, shrneme nejprve základní výsledky Lieovy teorie r-parametrických Lieových grup transformací
  [důkazy lze nalézt v Bluman, Anco (1-par. LGT), příp. v Cohnově knize z roku 1965 (pouze Lieovy grupy) apod.]

Lieův první základní teorém (někdy v podobě jen pro LG, ne pro LGT)

- Mějme r-par. LGT $\tilde{x} = F(x,\varepsilon)$, kde $x = (x^1,\dots,x^n)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r)$ $\quad (*)$

  s operací skládání parametrů

$$\phi(\varepsilon,\delta) = (\phi_1(\varepsilon,\delta),\dots,\phi_r(\varepsilon,\delta)), \quad \delta = (\delta_1,\dots,\delta_r),$$ kde $\phi_1,\dots,\phi_r$ jsou analyt. fce

  odpovídající složení dvou transformací

$$\tilde{\tilde{x}} = F(\tilde{x},\delta) = F(F(x,\varepsilon),\delta) = F(x,\phi(\varepsilon,\delta)).$$

Dále nechť $\Xi(x)$ je infinitezimální matice $(r\times n)$ s prvky

$$\xi^{\alpha j}(x) = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial \varepsilon_\alpha}\bigg|_{\varepsilon = e} = \frac{\partial F^j(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon_\alpha}\bigg|_{\varepsilon = e} \qquad \begin{array}{l}\alpha = 1,\dots,r\\ j = 1,\dots,n\end{array}$$

vyčísleno pro ε odpovídající identitě

a $\Theta(\varepsilon)$ je matice $r\times r$ s prvky

$$\Theta^\alpha{}_\beta(\varepsilon) = \frac{\partial \phi_\beta(a,b)}{\partial b_\alpha}\bigg|_{(a,b)=(\varepsilon,e)}, \quad \text{neboli} \quad \Theta(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial b_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial b_1} & \cdots & \frac{\partial\phi_r}{\partial b_1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial b_r} & & \cdots & \frac{\partial\phi_r}{\partial b_r}\end{pmatrix}_{(a,b)=(\varepsilon,e)}$$

a $\Psi(\varepsilon) = \Theta(\varepsilon)^{-1}$

Pak na jistém okolí identity ($\varepsilon \leftrightarrow e$) jsou transformace $(*)$ ekvivalentní řešení systému $r.n$ parciálních diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\tilde{x}^1}{\partial\varepsilon_1} & \frac{\partial\tilde{x}^2}{\partial\varepsilon_1} & \cdots & \frac{\partial\tilde{x}^n}{\partial\varepsilon_1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\tilde{x}^1}{\partial\varepsilon_r} & & \cdots & \frac{\partial\tilde{x}^n}{\partial\varepsilon_r}\end{pmatrix} = \Psi(\varepsilon)\,\Xi(\tilde{x})$$

s poč. podmínkou $\tilde{x} = x$ pro $\varepsilon = e$ (obvykle $\varepsilon = 0$)

Speciálně pro 1-par. LGT máme ($\Psi(\varepsilon)$ je nyní jediná fce, index α odpadá)

$$\left(\frac{d\tilde{x}^1}{d\varepsilon}, \frac{d\tilde{x}^2}{d\varepsilon} \cdots \frac{d\tilde{x}^n}{\partial\varepsilon}\right) = \Psi(\varepsilon)\left(\xi^1(\tilde{x}) \dots \xi^n(\tilde{x})\right)$$

a obecně lze nalézt novou parametrizaci $\tau(\varepsilon)$ takovou, že $\Psi'(\tau) = 1$,

$$\phi'(\tau_1,\tau_2) = \tau_1 + \tau_2 \quad \text{a tedy} \quad \frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \xi(\tilde{x})$$ (vektor) s poč. podm. $\tilde{x} = x$ pro $\tau = 0$

přičemž $\tau(\varepsilon) = \int_{\varepsilon = e}^{\varepsilon} \Psi(\varepsilon')\,d\varepsilon'$

Pozn. Lze též ukázat (Cohn 1965), že

$$\Theta^{-1}(\varepsilon)^\alpha{}_\beta = \Psi^\alpha_\beta(\varepsilon) = \frac{\partial\phi_\beta(a,b)}{\partial b_\alpha}\bigg|_{(a,b)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)}$$

Dk: rozvojem v δ výrazu $F(x,\varepsilon+\delta) = F(F(x,\varepsilon),\phi(\varepsilon^{-1},\varepsilon+\delta))$ a porovnáním členů v δ

Infinitezimální generátory X_α

- pro každý parametr ε_α r-par. LGT definujme operátor na prostoru funkcí $f(x)$:

$$X_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \xi^{\alpha j}(x) \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \alpha = 1, \dots, r$$

píšeme dolů, protože horní index budeme používat pro rozšíření do prostoru derivací

pro takto definované oper. lze Lieův první teorém formulovat tak, že transf. (*) jsou ekvivalentní

$$\tilde{x} = e^{\mu_1 X_1} e^{\mu_2 X_2} \dots e^{\mu_r X_r} x$$

, pro určité reálné parametry $\mu_1, \dots, \mu_r$

- Obecně $e^{\mu_\alpha X_\alpha} e^{\mu_\beta X_\beta} \neq e^{\mu_\beta X_\beta} e^{\mu_\alpha X_\alpha}$

přesto však existují $\mu_1', \dots, \mu_r'$ (obecně různé od $\mu_1, \dots, \mu_r$) takové, že např. $\tilde{x} = e^{\mu_2' X_2} e^{\mu_1' X_1} \dots e^{\mu_r' X_r} x$

- navíc každý operátor $X = \sum_{\alpha=1}^{r} \sigma_\alpha X_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \xi^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$, kde $\xi^j(x) = \sum_{\alpha=1}^{r} \sigma_\alpha \xi^{\alpha j}(x)$

pro určité σ_α dává pomocí $\tilde{x} = e^{\varepsilon X} x$ jednopar. podgrupu LGT s identitou pro $\varepsilon = 0$ a skládáním $\phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

Pozn.: jako obvykle $e^{\mu_\alpha X_\alpha} = 1 + \mu_\alpha X_\alpha + \frac{\mu_\alpha^2}{2!} X_\alpha^2 + \dots$

- Všechny inf. generátory X tvoří vekt. prostor s bází X_α a definujeme-li komutátor

$$[X_\alpha, X_\beta] = X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \phi^j_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

kde

$$\phi^j_{\alpha\beta}(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[\xi^{\alpha i}(x) \frac{\partial \xi^{\beta j}(x)}{\partial x^i} - \xi^{\beta i}(x) \frac{\partial \xi^{\alpha j}(x)}{\partial x^i} \right]$$

dostaneme tzv. Lieovu algebru, neboť je splněno též

(**) $\quad [X_\alpha, X_\beta] = -[X_\beta, X_\alpha]$; $\quad [X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]] + [X_\beta, [X_\gamma, X_\alpha]] + [X_\gamma, [X_\alpha, X_\beta]] = 0$

Jacobiho identita

Druhý Lieův zákl. teorém:

- Komutátor dvou infinit. operátorů r-par. LGT je též inf. operátor a lze psát $\quad [X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{r} c^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma$, kde $c^\gamma_{\alpha\beta}$ jsou strukturní konstanty

Třetí Lieův zákl. teorém:

- Vztahy pro strukturní konstanty $c^\gamma_{\alpha\beta}$ plynoucí z (**),

tj.
$$c^\gamma_{\alpha\beta} = -c^\gamma_{\beta\alpha} \quad \text{(antisymetričnost v } \alpha, \beta)$$

$$\sum_\varrho \left(c^\sigma_{\alpha\varrho} c^\varrho_{\beta\gamma} + c^\sigma_{\beta\varrho} c^\varrho_{\gamma\alpha} + c^\sigma_{\gamma\varrho} c^\varrho_{\alpha\beta} \right) = 0 \quad \text{pro } \forall \sigma$$

(Jacobiho identita pro strukt. konstanty)

Podrobnosti viz např. S. Lie, J. Merker: Theory of Transformation Groups I ~~s~~ ~~komentářem~~ a překlad J. Merker (Springer 2015)

Př. Škálování

Uvažujme transformaci $\tilde{x} = ax$, $a \in (0,\infty)$ identita pro $a=1$

$\phi(a,b) = ba$

a tedy $\Xi(x) = \left.\frac{d\tilde{x}}{da}\right|_{a=1} = x$

$$\Theta(\varepsilon) = \left.\frac{\partial \phi}{\partial b}\right|_{\substack{b=1\\ a=\varepsilon}} = \varepsilon \,, \quad \Psi(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} = \left.\frac{\partial \phi}{\partial b}\right|_{\substack{(a,b)=\\ =(\varepsilon^{-1},\varepsilon)}} = \varepsilon^{-1}$$

neboli $\tilde{x} = ax$ je ekvivalentní

$$\frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon} = \frac{\tilde{x}}{\varepsilon} \,, \quad \tilde{x}(1) = x \quad \Rightarrow \quad \tilde{x} = \varepsilon x$$

Parametrizací $\phi(\tau_1,\tau_2) = \tau_1 + \tau_2$, identita pro $\tau = 0$ dostaneme

$$\tau(\varepsilon) = \int_{\varepsilon'=1}^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon'}{\varepsilon'} = \ln \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = e^{\tau} \,, \text{ neboli } \tilde{x} = e^{\tau} x$$

Inf. generátor škálování je $X = x\frac{\partial}{\partial x}$ $\Rightarrow$ $\tilde{x} = e^{\varepsilon X} x = x + \varepsilon x + \frac{\varepsilon^2}{2!}x + \ldots = e^{\varepsilon} x$

Př: lineární transformace

$\tilde{x} = a_1 x + a_2$ – 2-par. LGT, identita pro $(a_1,a_2) = (1,0)$

inverzní prvek $(a_1,a_2)^{-1} = \left(\frac{1}{a_1}, -\frac{a_2}{a_1}\right)$

$$\phi(a,b) = (\underbrace{b_1 a_1}_{\phi_1(a,b)}, \underbrace{b_1 a_2 + b_2}_{\phi_2(a,b)})$$

Nyní

$$\Xi(x) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial \tilde{x}}{\partial a_1}\right|_{(1,0)} \\ \left.\frac{\partial \tilde{x}}{\partial a_2}\right|_{(1,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \Theta(\varepsilon) = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial b_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial b_1} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial b_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial b_2} \end{pmatrix}\right|_{\substack{(a,b)=\\ =(\varepsilon,(1,0))}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Psi(\varepsilon) = \Theta^{-1}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_1} & -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial b_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial b_1} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial b_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial b_2} \end{pmatrix}\right|_{\substack{(a,b)=\\ =(\varepsilon^{-1},\varepsilon)}}$$

a tedy $\tilde{x} = a_1 x + a_2$

je ekvivalentní řešení soustavy

$$(1) \quad \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\tilde{x}}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \qquad \tilde{x} = x \text{ pro } \begin{matrix}\varepsilon_1 = 1\\ \varepsilon_2 = 0\end{matrix}$$

$$(2) \quad \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varepsilon_2} = 1$$

neboť z (2) máme

$\tilde{x} = \varepsilon_2 + f(\varepsilon_1)$

a dosazením do (1) dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_1} = \frac{f(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1} \quad \Rightarrow \quad f = c\,\varepsilon_1$$

a z $\tilde{x} = x$ pro $\varepsilon_1 = 1$ je $c = x$.

Infinitez. operátory $X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}$ (škálování)

$X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$ (translace)

Spočteme

$$\tilde{x} = e^{\mu_1 X_1} e^{\mu_2 X_2} x = \left| \begin{matrix} X_2 x = 1, \; X_2^2 x = 0 \\ X_1 x = x, \; X_1^k x = x \end{matrix} \right| = e^{\mu_1 X_1}(x + \mu_2) =$$

$$= x + \mu_2 + \mu_1 x + \frac{\mu_1^2}{2} x + \ldots = e^{\mu_1} x + \mu_2$$

avšak

$$\tilde{x} = e^{\mu_2' X_2} e^{\mu_1' X_1} x = e^{\mu_2' X_2}(e^{\mu_1'} x) = e^{\mu_1'}(x + \mu_2')$$

porovnáním

$\mu_1 = \mu_1'$

$\mu_2 = e^{\mu_1'} \mu_2'$

Př: Lorentzova transformace

$$\tilde{x} = \gamma(v)(x - vt) = F^x(x,t,v)$$
$$\tilde{t} = \gamma(v)\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = F^t(x,t,v)$$

kde $\gamma(v) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ a identita nastává pro $v=0$

tvoří 1-par. LGT se skládání parametrů
$$\phi(v_1,v_2) = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

- Podle Prvního Lieova zákl. teorému je tato transformace ekvivalentní soustavě

$$(\dagger)\qquad \frac{d\tilde{x}}{dv} = \gamma(v)^2(-\tilde{t}), \qquad \frac{d\tilde{t}}{dv} = \gamma(v)^2\left(-\frac{\tilde{x}}{c^2}\right)$$

s poč. podmínkou $\tilde{x} = x$, $\tilde{t} = t$ pro $v=0$

neboť $\Xi(x,t) = \left(\frac{\partial F^x}{\partial v}\Big|_{v=0}, \frac{\partial F^t}{\partial v}\Big|_{v=0}\right) = \left(-t, -\frac{x}{c^2}\right) \Longleftarrow \begin{cases} \frac{d\gamma(v)}{dv} = \frac{v}{c^2}\gamma(v)^3 \\ \quad = 0 \quad \text{pro } v=0 \\ \gamma(0) = 1 \end{cases}$

a dále $\theta(v) = \frac{\partial\phi(v_1,v_2)}{\partial v_2}\Big|_{(v_1,v_2)=(v,0)} = \frac{1}{\gamma(v)^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$ $\Longleftarrow$ $\frac{\partial\phi(v_1,v_2)}{\partial v_2} = \frac{1}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}} - \frac{(v_1+v_2)}{\left(1+\frac{v_1v_2}{c^2}\right)^2}\frac{v_1}{c^2}$

$= 1 - \frac{v^2}{c^2}$ pro $v_1 = v$, $v_2 = 0$

a tedy $\Psi(v) = \theta^{-1}(v) = \gamma(v)^2$

- Soustava $(\dagger)$ vskutku dává Lorentz. transf. (DÚ)

Chceme-li mít parametrizaci s bin. op. $\phi'(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

vezmeme $\varepsilon(v) = \int_{v'=0}^{v} \gamma(v')^2 dv' = c \operatorname{arctanh}\left(\frac{v}{c}\right)$ neboli $v = c \tanh\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)$

a dostáváme soustavu

$$\frac{d\tilde{x}}{d\varepsilon} = -\tilde{t}, \qquad \frac{d\tilde{t}}{d\varepsilon} = -\frac{\tilde{x}}{c^2}$$

$\tilde{x} = x$, $\tilde{t} = t$ pro $\varepsilon = 0$

která má řešení
$$\tilde{x} = x\cosh\frac{\varepsilon}{c} - ct\sinh\frac{\varepsilon}{c}$$
$$\tilde{t} = -\frac{x}{c}\sinh\frac{\varepsilon}{c} + t\cosh\frac{\varepsilon}{c}$$

- infinitezimální operátor $X = \xi^x(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^t(x,t)\frac{\partial}{\partial t} = -t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{x}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}$

a tedy
$$\tilde{x} = e^{\varepsilon X}x = x + \varepsilon(-t) + \frac{\varepsilon^2}{2!}\left(\frac{x}{c^2}\right) + \frac{\varepsilon^3}{3!}\left(-\frac{t}{c^2}\right) + \dots = x\cosh\frac{\varepsilon}{c} - ct\sinh\frac{\varepsilon}{c}$$
$$\tilde{t} = e^{\varepsilon X}t = t + \varepsilon\left(-\frac{x}{c^2}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2!}\left(\frac{t}{c^2}\right) + \dots = t\cosh\frac{\varepsilon}{c} - \frac{x}{c}\sinh\frac{\varepsilon}{c}$$

- mimochodem, složení dvou Lorentzových transformací vede na

$$\tilde{\tilde{x}} = \gamma(v_2)(\tilde{x} - v_2\tilde{t}) = \gamma(v_2)\gamma(v_1)\left[x\left(1+\frac{v_1v_2}{c^2}\right) - t(v_1+v_2)\right] = \gamma(v)[x - vt]$$

z čehož pro $v = \dfrac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}$ plyne identita

$$\gamma(v_1)\gamma(v_2)\left(1+\frac{v_1v_2}{c^2}\right) = \gamma\left(\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}\right),$$

což vskutku platí. (ověřte za DÚ)

Rozšíření (též prodloužení) infinitezimálních transformací

- dříve jsme si ukázali, jak rozšířit lokální Lieovu grupu transformací do prostoru derivací, tj. jak z transformací nezávislých a závislých proměnných najít transformace všech potřebných derivací
- nyní budeme uvažovat jednoparam. LGT

$$\tilde{x}^i = F^i(x,u,\varepsilon) = x^i + \varepsilon \xi^i(x,u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$
$$\tilde{u}^\mu = G^\mu(x,u,\varepsilon) = u^\mu + \varepsilon \eta^\mu(x,u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

a zajímá nás, jak určíme rozšíření těchto infin. transformací do prostoru derivací, tj. hledáme $\eta^\mu_{i_1\dots i_k}$ ve vztazích

$$\tilde{u}^\mu_i = H^\mu_i(x,u,\partial u,\varepsilon) = u^\mu_i + \varepsilon \eta^\mu_i(x,u,\partial u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$
$$\vdots$$
$$\tilde{u}^\mu_{i_1\dots i_k} = H^\mu_{i_1\dots i_k}(x,u,\partial u,\dots \partial^k u,\varepsilon) = u^\mu_{i_1\dots i_k} + \varepsilon \eta^\mu_{i_1\dots i_k}(x,u,\partial u,\dots,\partial^k u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

- k tomu využijeme již dříve odvozených vztahů pro $H^\mu_i, \dots H^\mu_{i_1\dots i_k}$ a rozvineme je do řádu ε. Pro první derivace dostaneme

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}^\mu_1 \\ \vdots \\ \tilde{u}^\mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^\mu_1 \\ \vdots \\ H^\mu_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} D_1 G^\mu \\ \vdots \\ D_n G^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 F^1 & D_1 F^2 & \dots & D_1 F^n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ D_n F^1 & \dots & & D_n F^n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D_1 G^\mu \\ \vdots \\ D_n G^\mu \end{pmatrix} =$$

nyní už necháváme pouze členy do řádu ε

$$= \begin{pmatrix} 1+\varepsilon D_1 \xi^1 & \varepsilon D_1 \xi^2 & \dots & \varepsilon D_1 \xi^n \\ \varepsilon D_2 \xi^1 & 1+\varepsilon D_2 \xi^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \varepsilon D_n \xi^1 & \dots & & 1+\varepsilon D_n \xi^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^\mu_1 + \varepsilon D_1 \eta^\mu \\ \vdots \\ u^\mu_n + \varepsilon D_n \eta^\mu \end{pmatrix} =$$

zde využijeme toho, že pro $A = 1 + \varepsilon B$ platí $A^{-1} = 1 - \varepsilon B$ do řádu ε

$$= \begin{pmatrix} 1-\varepsilon D_1 \xi^1 & \dots & -\varepsilon D_1 \xi^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\varepsilon D_n \xi^1 & \dots & 1-\varepsilon D_n \xi^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^\mu_1 + \varepsilon D_1 \eta^\mu \\ \vdots \\ u^\mu_n + \varepsilon D_n \eta^\mu \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^\mu_1 + \varepsilon \left[D_1 \eta^\mu - \sum_{i=1}^n (D_1 \xi^i) u^\mu_i \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \vdots \\ u^\mu_n + \varepsilon \left[D_n \eta^\mu - \sum_{i=1}^n (D_n \xi^i) u^\mu_i \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^\mu_1 + \varepsilon \eta^\mu_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \vdots \\ u^\mu_n + \varepsilon \eta^\mu_n + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{pmatrix}$$

neboli $$\boxed{\eta^\mu_i = D_i\eta^\mu - \sum_{k=1}^{n}(D_i\xi^k)\,u^\mu_k}$$

- zcela obdobně bychom pokračovali pro vyšší derivace, jen místo $D_1 G^\mu$ bychom použili $D_1 H^\mu_i$ a pod.

Dostali bychom rekurzivní vztahy

$$\boxed{\eta^\mu_{i_1\dots i_k} = D_{i_k}\eta^\mu_{i_1\dots i_{k-1}} - \sum_{j=1}^{n}(D_{i_k}\xi^j)\,u^\mu_{i_1\dots i_{k-1}j}}$$

- odpovídající rozšíření infinitezimálního operátoru X do prostoru až k-tých derivací pak je

$$X^{(k)} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\mu=1}^{m}\eta^\mu\frac{\partial}{\partial u^\mu}}_{X} + \sum_{i,\mu}\eta^\mu_i\frac{\partial}{\partial u^\mu_i} + \dots + \sum_{\substack{i_1\dots i_k\\ \mu}}\eta^\mu_{i_1\dots i_k}\frac{\partial}{\partial u^\mu_{i_1\dots i_k}}$$

- v případě obyčejných diferenciálních rovnic (x nezávislá, y závislá prom.) budeme používat zjednodušenou notaci

$$\tilde{x} = F(x,y,\varepsilon) = x + \varepsilon\,\xi(x,y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$
$$\tilde{y} = G(x,y,\varepsilon) = y + \varepsilon\,\eta(x,y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$
$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} \equiv \tilde{y}_1 = H_1(x,y,y_1,\varepsilon) = y_1 + \varepsilon\,\eta^{(1)}(x,y,y_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$
$$\vdots$$
$$\frac{d^k\tilde{y}}{d\tilde{x}^k} \equiv \tilde{y}_k = H_k(x,y,y_1\dots y_k,\varepsilon) = y_k + \varepsilon\,\eta^{(k)}(x,y,y_1\dots y_k) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

kde nyní $\eta^{(1)} = D_x\eta - y_1 D_x\xi\,,\ \dots,\ \eta^{(k)} = D_x\eta^{(k-1)} - y_k D_x\xi$

Př: translace $\left.\begin{aligned}\tilde{x} &= x+\varepsilon a\\ \tilde{y} &= x+\varepsilon b\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}\xi(x,y) &= a\\ \eta(x,y) &= b\end{aligned}\right\} \Rightarrow \eta^{(k)} = 0$ pro $k \geq 1$

škálování $\left.\begin{aligned}\tilde{x} &= x\\ \tilde{y} &= e^\varepsilon y\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}\xi(x,y) &= 0\\ \eta(x,y) &= y\end{aligned}\right\} \Rightarrow \eta^{(k)} = y_k$ pro $k \geq 1$

rotace: $\left.\begin{aligned}\tilde{x} &= x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon\\ \tilde{y} &= x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}\xi(x,y) &= -y\\ \eta(x,y) &= x\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}\eta^{(1)} &= 1+y_1^2\\ \eta^{(2)} &= 3y_1y_2\\ \eta^{(3)} &= 3y_2^2 + 4y_1y_3\\ &\ \vdots\end{aligned}$

Invariance systému diferenciálních rovnic při bodových transformacích

<u>Def:</u> r-param. lokální Lieovu grupu transformací působící na prostoru nezávislých a závislých proměnných (x,u)

$$\tilde{x} = F(x,u,\varepsilon)$$
$$\tilde{u} = G(x,u,\varepsilon)$$

nazveme grupou (bodových) symetrií systému PDR

$$R^\sigma(x,u,\partial u,\dots,\partial^k u) = 0\,, \qquad \sigma = 1,\dots,N$$

pokud po rozšíření těchto transformací do prostoru derivací až do k-tého řádu zůstane tento systém nezměněn, tj. bude opět platit

$$R^\sigma(\tilde{x},\tilde{u},\partial\tilde{u},\dots\partial^k\tilde{u}) = 0\,, \quad \sigma = 1,\dots,N$$

- Pokud má systém $R^\sigma(x,u,\dots\partial^k u)=0$ řešení, pak je toto lib. řešení při těchto transformacích převedeno na třídu nových řešení tohoto systému parametricky závislých na ε.
  Jinými slovy nadplocha v prostoru $(x,u,\partial u,\dots\partial^k u)$ daná rovnicemi $R^\sigma=0$, na které jsou všechna řešení tohoto systému, zůstává nezměněna.
- Říkáme též, že systém $R^\sigma=0$ je invariantní při těchto bod. transf.

Infinitezimální kritérium invariance systému PDR

<u>Věta</u> (nutná podmínka pro invarianci PDR při bod. transformacích)

Nechť $X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{m} \eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ je lib. infinit. operátor r-param. LGT $\tilde{x}=F(x,u,\varepsilon)$, $\tilde{u}=G(x,u,\varepsilon)$ a nechť

$$X^{(k)} = X + \sum_{i,\alpha} \eta^\alpha_i(x,u,\partial u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha_i} + \dots + \sum_{i_1,\dots,i_k,\alpha} \eta^\alpha_{i_1\dots i_k}(x,u,\dots\partial^k u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1\dots i_k}}$$

je jeho k-té rozšíření do prostoru derivací. Pokud je tato LGT grupou symetrie systému $R^\sigma=0$, $\sigma=1,\dots,N$, pak musí platit, že

$$\boxed{X^{(k)} R^\sigma(x,u,\partial u,\dots,\partial^k u)\Big|_{R^\sigma=0} = 0.}$$

(vyčísleno na nadploše dané $R^\sigma=0$)

Speciálně to musí platit pro lin. nezávislé inf. operátory X_α.

Důkaz: Tvoří-li transf. $\tilde{x} = F(x,u,\varepsilon)$, $\tilde{u} = G(x,u,\varepsilon)$ grupu symetrie systému $R^\sigma(x,u,\partial u, \dots \partial^k u) = 0$, pak musí být

$$R^\sigma(\tilde{x},\tilde{u},\partial\tilde{u},\dots\partial^k\tilde{u}) = 0 \text{ pro } \forall\varepsilon \text{ a } \sigma = 1,\dots,N.$$

Derivací podle ε_α dostaneme

$$0 = \frac{\partial R^\sigma}{\partial \varepsilon_\alpha}\Big|_{\varepsilon=0} = \sum_j \underbrace{\frac{\partial R^\sigma}{\partial \tilde{x}^j}\Big|_{\varepsilon=0}}_{\frac{\partial R^\sigma}{\partial x^j}} \underbrace{\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial \varepsilon_\alpha}\Big|_{\varepsilon=0}}_{\xi^{\alpha j}(x)} + \sum_\mu \frac{\partial R^\sigma}{\partial \tilde{u}^\mu}\Big|_{\varepsilon=0} \frac{\partial \tilde{u}^\mu}{\partial \varepsilon_\alpha}\Big|_{\varepsilon=0} + \dots$$

$$\dots + \sum_{\mu, j_1,\dots j_k} \frac{\partial R^\sigma}{\partial \tilde{u}^\mu_{j_1\dots j_k}}\Big|_{\varepsilon=0} \frac{\partial \tilde{u}^\mu_{j_1\dots j_k}}{\partial \varepsilon_\alpha}\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= X^{(k)}_\alpha R^\sigma(x,u,\partial u,\dots \partial^k u) \text{ vyčíslené na nadploše } R^\sigma = 0$$

Libovolný inf. op. X je lineární kombinací X_α, takže díky linearitě derivací musí totéž platit i pro $X^{(k)}$.

Př. 1) LHO $\ddot{x} + \omega^2 x = 0 = R(t,x,\dot{x},\ddot{x})$

Tato rovnice je invariantní při translaci v čase $\tilde{t} = t + \beta$ generované inf. op. $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ a při škálování v x, neboli při $\tilde{x} = \alpha x$ generované inf. op. $X_2 = x\frac{\partial}{\partial x}$. Musí tedy platit

$$0 = X_1^{(2)}(\ddot{x} + \omega^2 x)\Big|_{R=0} = \frac{\partial}{\partial t}(\ddot{x} + \omega^2 x)\Big|_{R=0} = 0 \ \checkmark$$

a

$$0 = X_2^{(2)}(\ddot{x} + \omega^2 x)\Big|_{R=0} = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + \dot{x}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} + \ddot{x}\frac{\partial}{\partial \ddot{x}}\right)(\ddot{x} + \omega^2 x)\Big|_{R=0} = (\ddot{x} + \omega^2 x)_{R=0} = 0 \ \checkmark$$

2) rovnice vedení tepla $u_{xx} = u_t$ je invariantní při transformacích

$$\tilde{x} = x + 2t\varepsilon, \quad \tilde{t} = t, \quad \tilde{u} = u e^{-x\varepsilon - t\varepsilon^2}$$

s inf. op. $X = 2t\frac{\partial}{\partial x} - ux\frac{\partial}{\partial u}$

$$\xi^x = 2t, \quad \xi^t = 0, \quad \eta = -ux$$

mělo by tedy být

$$0 = X^{(2)}(u_{xx} - u_t)\Big|_{u_{xx}=u_t}, \quad \text{kde } X^{(2)} = X + \eta_x\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta_t\frac{\partial}{\partial u_t} + \dots + \eta_{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}$$

přičemž

$$\eta_x = D_x\eta - \underbrace{(D_x\xi^x)}_{0}u_x - \cancel{(D_x\xi^t)u_t} = -u - xu_x$$

$$\eta_t = D_t\eta - (D_t\xi^x)u_x = -xu_t - 2u_x$$

$$\eta_{xx} = D_x\eta_x - \underbrace{(D_x\xi^x)}_{0}u_{xx} = -2u_x - u_{xx}x$$

a tedy

$$X^{(2)}(u_{xx} - u_t)\Big|_{u_{xx}=u_t} = (\eta_{xx} - \eta_t)\Big|_{u_{xx}=u_t} = -x(u_{xx} - u_t)\Big|_{u_{xx}=u_t} = 0 \ \checkmark$$

Věta (postačující podmínka):

Mějme systém PDR $R^\sigma(x,u,\partial u,\dots \partial^k u)=0$, $\sigma=1,\dots,N$, který je maximální hodnosti, tj. matice

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial R^1}{\partial x^1}, & \cdots, \frac{\partial R^1}{\partial u^1}, & \cdots, \frac{\partial R^1}{\partial u^\alpha_{i_1\dots i_k}} & \cdots \\ \frac{\partial R^2}{\partial x^1} \cdots & \ddots & & \\ \vdots & & \frac{\partial R^N}{\partial u^\alpha_{i_1\dots i_k}} & \cdots \\ \frac{\partial R^N}{\partial x^1} & \cdots & & \end{pmatrix}$$

má hodnost N na nadploše $R^\sigma=0$.

Pokud pro všechny inf. op. r-par. LGT na prostoru (x,u) a jejich k-té rozšíření platí

$$X^{(k)} R^\sigma(x,u,\partial u,\dots,\partial^k u)\Big|_{R^\sigma=0}=0 \qquad (*)$$

pak je tato LGT grupou bodových symetrií systému $R^\sigma=0$.

Pozn: Podmínka max. hodnosti vylučuje případy „nešťastného" zápisu systému PDR, kdy může být podmínka $(*)$ splněna identicky pro lib. inf. op. X, např. pokud bychom rovnici LHO zapsali jako $R=(m\ddot{x}+kx)^2=0$, pak pro lib. X by bylo

$$X^{(2)}(m\ddot{x}+kx)^2\Big|_{m\ddot{x}=-kx} = 2(m\ddot{x}+kx)\,X^{(2)}(m\ddot{x}+kx)\Big|_{m\ddot{x}=-kx}=0$$

což není, co bychom očekávali.

Zde totiž

$$J=\left(\frac{\partial R}{\partial t},\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial R}{\partial \dot{x}},\frac{\partial R}{\partial \ddot{x}}\right)\Big|_{R=0}=(0,0,0,0)$$

oproti rovnici $m\ddot{x}+kx=0$, kdy

$$J=(0,k,0,m)$$

Důkaz: založený na přechodu k tzv. normálním souřadnicím (kanonickým) v nichž X má jednoduchý tvar $X=\frac{\partial}{\partial s}$ (translace) a tedy R^σ nezávisí na této souřadnici s a je tedy invariantní při jednopar. podgrupě generované X. Toto můžeme provést pro všechny jednopar. podgrupy a rozšířit na celou lokální LGT.

O normálních (kanon.) souřadnicích si povíme později, až budeme využívat symetrií k řešení diferenciálních rovnic.

Infinitezimální kritérium – využití

1) Přímé ověření, že jistá bodová transformace generovaná inf. op. X patří do grupy symetrie daného systému

2) Inf. kritérium s obecným X dává jisté podmínky na $\xi^i(x,u)$ a $\eta^\alpha(x,u)$, které často vedou na systém lineárních PDR, které mají jednoduché (mnohdy polynomiální) řešení $\Rightarrow$ nalezení bodových symetrií algoritmicky

3) Inf. kritérium dává též podmínky na $R^\sigma = 0$, pokud máme zadanou grupu symetrie a její inf. operátory. Zvlášť omezíme-li se na jistý řád a typ difer. rovnice (např. požadujeme linearitu), může být taková dif. rovnice pro určitou grupu už určena jednoznačně (až na konstanty) $\Rightarrow$ nalezení difer. rovnic (obecněji invariantů) zadané symetrie

4) Znalost bod. symetrií nám později umožní příslušné dif. rovnice zjednodušit, či přímo vyřešit. U PDR obvykle budeme hledat partikulární řešení.

5) A konečně později si odvodíme inf. kritérium tzv. variační (obecněji Noetherovské) symetrie a využijeme bodové transformace k nalezení zákonů zachování.

Bodové symetrie ODR $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ (volná částice v 1D)

- hledejme všechny inf. operátory

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

pro které je splněno infin. kritérium $X^{(2)} y_2 \big|_{y_2=0} = 0$, kde $y_2 = \frac{d^2y}{dx^2}$

- rozšíření do prostoru derivací:

$$\eta^{(1)}(x,y,y_1) = D_x\eta - (D_x\xi)y_1 = \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}y_1 - \frac{\partial\xi}{\partial x}y_1 - \frac{\partial\xi}{\partial y}y_1^2$$

$$\eta^{(2)}(x,y,y_1,y_2) = D_x\eta^{(1)} - (D_x\xi)y_2 = \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}y_1 + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}y_1^2 -$$

$$- \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}y_1 - 2\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}y_1^2 - \frac{\partial\xi}{\partial x}y_2 - \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}y_1^3 - \frac{\partial\xi}{\partial y}2y_1y_2$$

- infinitez. kritérium pak dává

$$X^{(2)}y_2\big|_{y_2=0} = \eta^{(2)}(x,y,y_1,y_2)\big|_{y_2=0} = 0$$

přičemž tato podmínka musí být splněna pro všechna x, y a y_1.

Protože $\xi(x,y)$ a $\eta(x,y)$ nezávisí na y_1 a podmínka $\eta^{(2)}(x,y,y_1,y_2=0)=0$ je polynomiální rovnice v y_1 třetího stupně, musí být každý koeficient u mocnin y_1 roven nule. Odtud

u y_1^3: $\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = 0$, u y_1^2: $\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} = 0$, u y_1: $2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = 0$

a konečně u konstantního členu v y_1: $\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = 0$

dosazení za $\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = 0$

- z prvních dvou rovnic navíc dostaneme (po derivování podle y) $\frac{\partial^3\eta}{\partial y^3} - 2\frac{\partial^3\xi}{\partial x\partial y^2} = \frac{\partial^3\eta}{\partial y^3} = 0$

a z druhých dvou obdobně $2\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial^3\xi}{\partial x^3} = -\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3} = 0$

- vidíme tedy, že $\xi(x,y)$ je nejvýše lineární v y a kvadratická v x a $\eta(x,y)$ je nejvýše lineární v x a kvadratická v y

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \xi(x,y) &= c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4y + c_5xy + c_6x^2y \\ \eta(x,y) &= d_1 + d_2x + d_3y + d_4xy + d_5y^2 + d_6xy^2 \end{aligned}$$

- ovšem dosazení do $\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} = 0$ a $2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = 0$

ještě dostaneme podmínky

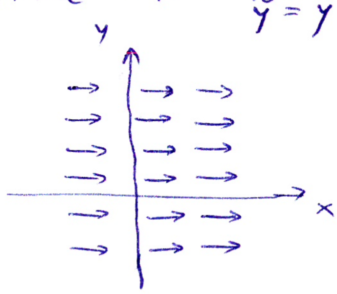
$$\left.\begin{aligned} 2(d_5 + d_6x) - 2(c_5 + 2c_6x) &= 0 \\ 2(d_4 + 2d_6y) - 2(c_3 + c_6y) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad d_5 = c_5, \quad d_4 = c_3, \quad c_6 = d_6 = 0$$

neboť to musí platit pro libovolné x a y.

• dostali jsme tak nejobecnější ξ a η s osmi nezávislými konstantami $\Rightarrow$ 8-par. Lieova grupa transformací s osmi lin. nezávislými infin. generátory (vždy položíme jednu konstantu rovnu 1 a ostatní rovny 0):

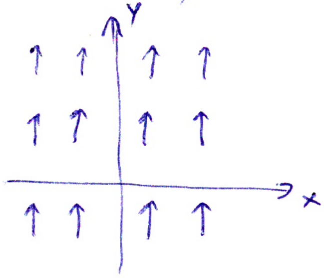
$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ (pro $c_1 = 1$)

translace v x: $\tilde{x} = x + \varepsilon$, $\tilde{y} = y$



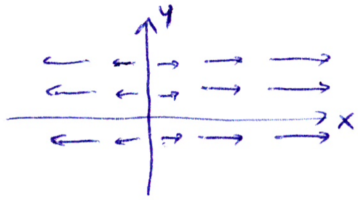
$X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ ($d_1 = 1$)

translace v y: $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y + \varepsilon$



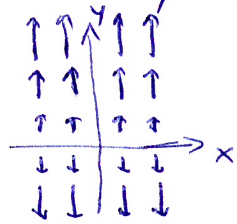
$X_3 = x\frac{\partial}{\partial x}$ ($c_2 = 1$)

škálování v x: $\tilde{x} = e^{\varepsilon} x$, $\tilde{y} = y$



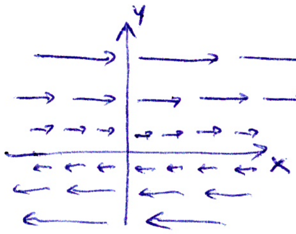
$X_4 = y\frac{\partial}{\partial y}$ ($d_3 = 1$)

škálování v y: $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = e^{\varepsilon} y$



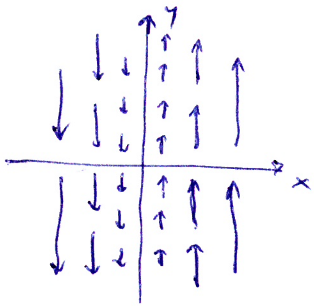
$X_5 = y\frac{\partial}{\partial x}$ ($c_4 = 1$)

Galileova transformace v x: $\tilde{x} = x + \varepsilon y$, $\tilde{y} = y$



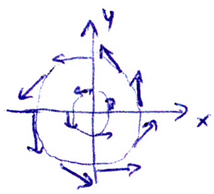
$X_6 = x\frac{\partial}{\partial y}$ ($d_2 = 1$)

Galileova transformace v y: $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y + \varepsilon x$

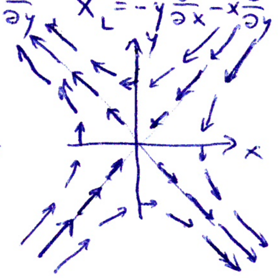


$\Rightarrow$ jejich lineární kombinace dávají rotace a Lorentz. transf.

$X_R = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$



$X_L = -y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$

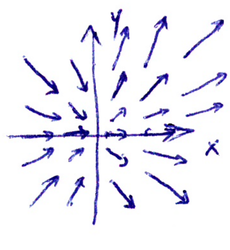


$X_7 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$

($c_3 = d_4 = 1$)

projektivní transformace v x:

$\tilde{x} = \frac{x}{1 - \varepsilon x}$, $\tilde{y} = \frac{y}{1 - \varepsilon x}$

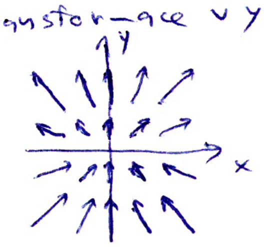


$X_8 = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$ ($d_5 = c_5 = 1$)

projektivní transformace v y:

$\tilde{x} = \frac{x}{1 - \varepsilon y}$

$\tilde{y} = \frac{y}{1 - \varepsilon y}$



Bodové symetrie klasického centrálního problému

- uvažujme Newtonovy pohybové rovnice pro sféricky symetrický potenciál $V(r)$, tj. systém ODR

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -V'(r)\frac{x}{r}$$

$$m\ddot{y} = -V'(r)\frac{y}{r}$$

$$m\ddot{z} = -V'(r)\frac{z}{r}$$

a hledejme bodové transformace s inf. generátory ve tvaru

$$X = \xi(t,x,y,z)\frac{\partial}{\partial t} + \eta^x(t,x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + \eta^y(t,x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + \eta^z(t,x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}$$

pomocí infinitezimálního kritéria

$$(*)\qquad X^{(2)}\left(m\ddot{x} + V'(r)\frac{x}{r}\right)\Big|_{m\ddot{\vec{r}} = -V'(r)\frac{\vec{r}}{r}} = 0$$

a podobně pro rovnice s y a z

- s využitím Mathematicy, kde jsme jako první (obecný) ansatz použili $\xi = \Xi$, $\eta^x = \alpha$, $\eta^y = \beta$, $\eta^z = \gamma$ (viz notebook na webu), dostaneme podmínky (mimo mnoha dalších, ne už tak přehledných), (jde o koeficienty v polynomiálním výrazu v proměnných $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, které musí být nulové)

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\alpha}{\partial y\partial z} = 0$$

a pod. pro β a γ s cykl. záměnou x, y, z

a také $\frac{\partial^2\Xi}{\partial x^2} = 0$ atd. pro derivace „podle" y^2, z^2, xy, xz a yz

odtud vidíme, že $\Xi(t,x,y,z)$ je lineární v x, y i z

a $\alpha(t,x,y,z)$ je lineární v y a z a pod. β v x a z, a γ v x a y

tedy ansatz se dá zjednodušit na (2. ansatz v Mathematice)

$$\xi = \delta_x(t)\,x + \delta_y(t)\,y + \delta_z(t)\,z + \delta_0(t)$$

$$\eta^x = \alpha_y(t,x)\,y + \alpha_z(t,x)\,z + \alpha_0(t,x)$$

$$\eta^y = \beta_x(t,y)\,x + \beta_z(t,y)\,z + \beta_0(t,y)$$

$$\eta^z = \gamma_x(t,z)\,x + \gamma_y(t,z)\,y + \gamma_0(t,z)$$

- dosazením opět do (*) dostaneme např.

$$\frac{\partial \alpha_y(t,x)}{\partial x} = \frac{d\delta_y(t)}{dt} \Rightarrow \alpha_y(t,x) = \underbrace{\delta_y'(t)\, x + \alpha_y^0(t)}_{\text{zatím obecné fce času}}$$

a pod. pro $\alpha_z, \beta_x, \beta_z, \gamma_x$ a $\gamma_y \Rightarrow$ jsou lineární v prostorových souřadnicích

a dále $$\frac{\partial^2 \alpha_0(t,x)}{\partial x^2} = 2\,\frac{d\delta_x(t)}{dt} \Rightarrow \alpha_0(t,x) = \delta_x'(t)\, x^2 + \alpha_0^1(t)\, x + \alpha_0^0(t)$$

a pod. pro $\beta_0(t,y)$ a $\gamma_0(t,z)$, které jsou kvadratické v y, resp. v z

- nyní máme 3. ansatz, kde už jsou pouze neznámé funkce času t a podmínky (*) dají polynom v $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ a kvůli přítomnosti $V(r)$ i komplikovanější funkci v x, y, a z, ovšem která musí být nulová pro lib. hodnoty x, y, z.

- Dosazením opět v Mathematice nalezneme např. podmínky:

$\alpha_y^0(t)$, $\alpha_z^0(t)$, $\beta_x^0(t)$, $\beta_z^0(t)$, $\gamma_x^0(t)$ a $\gamma_y^0(t)$ musí být konstanty

a navíc $\alpha_y^0 = -\beta_x^0$, $\alpha_z^0 = -\gamma_x^0$ a $\beta_z^0 = -\gamma_y^0$

protože už žádné další podmínky se pro tyto koeficienty neobjeví, dostáváme očekávané generátory rotací

$X_1 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}$ (položením $\gamma_y^0 = 1$ a ostatních nezávislých koeficientů 0),

$X_2 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}$ ($\alpha_z^0 = 1$),

$X_3 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$ ($\beta_x^0 = 1$)

což je přímý důsledek volby $V = V(r)$, tj. sféricky symetrického potenciálu

- dále z 3. ansatzu též dostaneme podmínky

$$\alpha_0^0(t)\,[V'(r) - rV''(r)] = 0 \quad \text{a pod. pro } \beta_0^0(t) \text{ a } \gamma_0^0(t)$$

a tedy pokud $V'(r) = rV''(r)$, bude mít problém speciální symetrie, neboť pak α_0^0, β_0^0 a γ_0^0 mohou být nenulové. To nastává pouze pro $V(r) = a_1 r^2 + a_2$ s a_1 a a_2 konstantami, tj. pro volnou částici a lin. harmonický oscilátor, pro které máme 3 nezávislé jednorozměrné rovnice a mnoho symetrií.

- dále se budeme zabývat případem $V'(r) \neq rV''(r)$,
  pak $\alpha_0^0 = \beta_0^0 = \gamma_0^0 = 0$ a též $\delta_x = \delta_y = \delta_z = 0$, neboť
  podmínk typu $\delta_x(t) V'(r) + mr\, \delta_x''(t) = 0$ jsou netriviální opět
  pouze pro $V(r) = a_1 r^2 + a_2$.
- konečně z podmínek jako
$$\frac{d^2 \alpha_0^1(t)}{dt^2} = 0 \quad \text{apod. pro } \beta_0^1 \text{ a } \gamma_0^1 \Rightarrow \text{linearita v } t$$
  a
$$2\frac{d\alpha_0^1(t)}{dt} = \frac{d^2\delta_0(t)}{dt^2} \Rightarrow \delta_0 \text{ je kvadratická v } t$$
  a tedy 4. ansatz je (nejobecnější pro $V'(r) \neq rV''(r)$)
$$\xi(t,x,y,z) = \delta_0^2 t^2 + \delta_0^1 t + \delta_0^0$$
$$\eta^x(t,x,y,z) = c_1 y + c_2 z + (\delta_0^2 t + \alpha_0) x$$
$$\eta^y(t,x,y,z) = -c_1 x + c_3 z + (\delta_0^2 t + \beta_0) y$$
$$\eta^z(t,x,y,z) = -c_2 x - c_3 y + (\delta_0^2 t + \gamma_0) z$$
- odtud ještě dostaneme podmínky
$$\delta_0^2 [3V'(r) + rV''(r)] = 0 \Rightarrow \delta_0^2 = 0, \text{ ledaže je } V(r) = \frac{b_1}{r^2} + b_2$$
  a $(2\delta_0^1 - \alpha_0) V'(r) + \alpha_0 r V''(r) = 0$ apod. pro β_0 a γ_0
  $\Rightarrow \alpha_0 = \delta_0^1 = 0$ pro obecný potenciál (a též $\beta_0 = \gamma_0 = 0$)
  nebo pro $V(r) = b_1 r^N + b_2$, kdy bude
$$(2\delta_0^1 - \alpha_0) N + \alpha_0 N(N-1) = 0 \quad (\text{a stejně pro } \beta_0 \text{ a } \gamma_0)$$
  a tedy $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = \dfrac{2\delta_0^1}{2-N}$ pro $N \neq 2$
  pro $N = 2$ máme $\delta_0^1 = 0$ a $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ libovolné
  (jde o případ lin. harmonického oscilátoru, u kterého lze škálovat prostor. proměnné lib. a perioda se nemění)
- <u>Shrnutí</u>: Obecný $V(r)$ – 4-par. LGT – prostorové rotace + translace v čase ($\delta_0^0 \neq 0$)
  X_1, X_2, X_3 viz výše a $X_4 = \frac{\partial}{\partial t}$
  pro $V(r) = b_1 r^N + b_2$ navíc škálování $X_5 = t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2}{2-N}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)$
  a pro $N = -2$ ještě projektivní transf. $X_6 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + t\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)$

  pro $N = -1$ plyne z X_5 3. Keplerův zákon
$$\tilde{t} = \alpha t, \quad \tilde{r} = \alpha^{2/3} r \Rightarrow \frac{t^2}{r^3} = \text{konst.}$$

Bodové symetrie rovnice vedení tepla

- nyní už stručněji s využitím Mathematicy (viz notebook na webu)
  - uvažujme rovnici $u_{xx} = u_t$
    a hledejme $X = \xi^x(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^t(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}$
  - z podmínky $X^{(2)}(u_{xx}-u_t)\big|_{u_{xx}=u_t} = 0$ (*)

  dostaneme (mimo jiné) podmínky
  $$\frac{\partial \xi^x}{\partial u} = 0 = \frac{\partial \xi^t}{\partial u} = \frac{\partial \xi^t}{\partial x} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} \quad \text{a} \quad 2\frac{\partial \xi^x}{\partial x} = \frac{\partial \xi^t}{\partial t}$$
  z nichž určíme 2. ansatz
  $$\xi^t(x,t,u) = \tau(t), \quad \xi^x(x,t,u) = \tfrac{1}{2}\tau'(t)x + \chi(t), \quad \eta(x,t,u) = \alpha(x,t)u + \beta(x,t)$$
  - opětovným dosazením do (*) vyjde
  $$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\tfrac{1}{4}\tau''(t)x - \tfrac{1}{2}\chi'(t) \implies \alpha \text{ je kvadratické v } x$$
  a tedy 3. ansatz je jako v 2. ansatzu, jen
  $$\alpha(x,t) = -\tfrac{1}{8}\tau''(t)x^2 - \tfrac{1}{2}\chi'(t)x + \gamma(t)$$
  - konečně máme podmínky
  $$\chi''(t) = 0, \quad \tau'''(t) = 0 \quad \text{a} \quad 4\gamma'(t) = -\tau''(t)$$
  $\implies \chi$ je lineární v t, τ kvadratická v t, a γ lineární v t
  - odtud výsledek (6 nezávislých parametrů)
  $$\xi^x(x,t,u) = c_1 + c_4 x + 2c_5 t + 4c_6 xt$$
  $$\xi^t(x,t,u) = c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2$$
  $$\eta(x,t,u) = (c_3 - c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2)u + \beta(x,t)$$
  kde $\beta(x,t)$ je libovolné řešení rovnice vedení tepla $\beta_{xx} = \beta_t$
  (toto je důsledek linearity rovnice)

  tj. máme 6 lin. nezávislých netriviálních gen.

  $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial t}$ $\iff$ translace v x: $\tilde{x} = x+\varepsilon$, $\tilde{t} = t$, $\tilde{u} = u$, translace v t: $\tilde{t} = t+\varepsilon$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = u$

  $X_3 = u\frac{\partial}{\partial u}$, $X_4 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}$ $\iff$ škálování v u: $\tilde{u} = e^{\varepsilon}u$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{t} = t$, škálování t a x: $\tilde{x} = e^{\varepsilon}x$, $\tilde{t} = e^{2\varepsilon}t$, $\tilde{u} = u$

  $X_5 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}$ $\iff$ Galileova transf. $\tilde{x} = x + 2\varepsilon t$, $\tilde{t} = t$, $\tilde{u} = ue^{-x\varepsilon - \varepsilon^2 t}$

  $X_6 = 4tx\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - (2t+x^2)u\frac{\partial}{\partial u}$ $\iff$ „projektivní" transf. v t
  $$\tilde{x} = \frac{x}{1-4t\varepsilon}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{1-4t\varepsilon}, \quad \tilde{u} = u\sqrt{1-4\varepsilon t}\, e^{-\frac{\varepsilon x^2}{1-4t\varepsilon}}$$

  a ∞-rozm. Lieovu algebru ve tvaru
  $$X_\infty = \beta(x,t)\frac{\partial}{\partial u} \iff \tilde{x} = x,\ \tilde{t} = t,\ \tilde{u} = u + \varepsilon\beta(x,t)$$

Bodové symetrie 1D Schrödingerovy rovnice pro volnou částici

- téměř totožné s rovnicí vedení tepla, jen komplexní
- hledejme bod. symetrie rce

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} \Rightarrow i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\lambda\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \text{ kde } \lambda = \frac{\hbar}{2m}$$

generované $X = \xi^x(x,t,\psi)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^t(x,t,\psi)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,t,\psi)\frac{\partial}{\partial\psi}$ 1. ansatz

- z podmínky

$$X^{(2)}\left(i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \lambda\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{\frac{\partial\psi}{\partial t} = +i\lambda\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}} = 0 \qquad (*)$$

dostaneme (mimo jiné)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\xi^t}{\partial\psi} = 0, \quad \frac{\partial\xi^t}{\partial x} = 0 \Rightarrow \xi^t = \xi^t(t) = \tau(t) \\
&\text{a dále } \frac{\partial\xi^x}{\partial\psi} = -i\lambda\frac{\partial^2\xi^t}{\partial x\partial\psi} = 0 \Rightarrow \xi^x = \xi^x(x,t) \\
&\frac{\partial^2\eta}{\partial\psi^2} = 2\frac{\partial^2\xi^x}{\partial x\partial\psi} = 0 \Rightarrow \eta = \eta^\psi(x,t)\,\psi + \eta^0(x,t)
\end{aligned}\right\} \text{2. ansatz}$$

- dosazení opět do (*):

$$\frac{d\tau}{dt} = 2\frac{\partial\xi^x(x,t)}{\partial x} \Rightarrow \text{linearita } \xi^x \text{ v } x \Rightarrow \xi^x = \frac{1}{2}\frac{d\tau}{dt}x + \sigma(t)$$

$$\xi^t = \tau(t)$$

$$-i\underbrace{\frac{\partial\xi^x}{\partial t}}_{\text{lineární v } x} + 2\lambda\frac{\partial\eta^\psi}{\partial x} = \lambda\frac{\partial^2\xi^x}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \eta^\psi \text{ kvadratické v } x$$

$$\underbrace{\eta = (\alpha(t)x^2 + \beta(t)x + \gamma(t))\,\psi + \eta^0(x,t)}_{\text{3. ansatz}}$$

- opětovné dosazení do (*):

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \quad \frac{d\beta}{dt} = 0 \qquad \text{konstanty}$$

$$2\lambda\alpha + i\frac{d\gamma}{dt} = 0, \quad 2\lambda\beta - i\frac{d\sigma}{dt} = 0 \Rightarrow \gamma \text{ a } \sigma \text{ lineární v } t$$

$$8\lambda\alpha = i\frac{d^2\tau}{dt^2} \Rightarrow \tau \text{ kvadratické v } t$$

$\Rightarrow$ 4. ansatz

$$\boxed{\begin{aligned}
\xi^x &= c_1 + c_3x + c_5t + c_6tx \\
\xi^t &= c_2 + 2c_3t + c_6t^2 \\
\eta &= \left(c_4 + \frac{ic_5x}{2\lambda} + \frac{ic_6x^2}{4\lambda} - \frac{c_6t}{2}\right)\psi + \eta^0(x,t)
\end{aligned}}$$

kde $\eta^0(x,t)$ je lib. řešení Schr. rovnice

- konečné transformace pro jediné $c_i = 1$, ostatní nulové

$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ ... translace v x: $\tilde{x} = x + \varepsilon$, $\tilde{t} = t$, $\tilde{\psi} = \psi$

$X_2 = \frac{\partial}{\partial t}$ ... translace v t: $\tilde{x} = x$, $\tilde{t} = t + \varepsilon$, $\tilde{\psi} = \psi$

$X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}$ ... škálování: $\tilde{x} = xe^{\varepsilon}$, $\tilde{t} = te^{2\varepsilon}$, $\tilde{\psi} = \psi$

$X_4 = c\psi\frac{\partial}{\partial \psi}$ ... škálování a fáze, c obecně komplexní

pro $c = 1$: $\tilde{x} = x$, $\tilde{t} = t$, $\tilde{\psi} = e^{\varepsilon}\psi$

pro $c = i$: $\tilde{x} = x$, $\tilde{t} = t$, $\tilde{\psi} = e^{i\varepsilon}\psi$

$X_5 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{ix}{2\lambda}\psi\frac{\partial}{\partial \psi}$ ... Galileova transf. se změnou fáze ψ

(pro $\varepsilon = v$) $\tilde{x} = x + vt$, $\tilde{t} = t$, $\tilde{\psi} = \psi\, e^{i(2vx+tv^2)/4\lambda} = \psi\, e^{i(mvx + \frac{1}{2}mv^2 t)/\hbar}$

ovšem pozor, řešení $\psi = \Theta(x,t)$ se ztransformuje na jiné řešení dané implicitně $\tilde{\psi} = G(F(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{\psi},\varepsilon^{-1}), \Theta(F(\tilde{x},\tilde{t},\tilde{\psi},\varepsilon^{-1}),\varepsilon)$

~~[illegible]~~ a tedy např. z $\Theta(x,t) = A$ bude

$$\tilde{\psi} = A\, e^{\frac{i}{\hbar}[mv(\tilde{x} - v\tilde{t}) + \frac{1}{2}mv^2\tilde{t}]} \Rightarrow$$

nové řešení (odnulované) $\psi(x,t) = A\, e^{\frac{i}{\hbar}(mvx - \frac{1}{2}mv^2 t)}$ rovinná vlna

$X_6 = tx\frac{\partial}{\partial x} + t^2\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{ix^2}{4\lambda} - \frac{t}{2}\right)\psi\frac{\partial}{\partial \psi}$ .. projektivní transformace

$$\tilde{t} = \frac{t}{1-\varepsilon t},\ \tilde{x} = \frac{x}{1-\varepsilon t},\ \tilde{\psi} = \psi\sqrt{1-\varepsilon t}\, e^{\frac{im\varepsilon x^2}{2\hbar(1-\varepsilon t)}}$$

opět bychom z konstantního řešení $\Theta(x,t) = A$ dostali

netriviální řešení $\psi(x,t) = \frac{A}{\sqrt{1+\varepsilon t}}\, e^{\frac{im\varepsilon x^2}{2\hbar(1+\varepsilon t)}}$

- totéž bychom dostali pro $\psi = \psi_R + i\psi_I \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi_I}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2\psi_R}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \psi_R}{\partial t} = -\lambda\frac{\partial^2\psi_I}{\partial x^2}$$

jen nyní zvlášť škálování $X_4 = \psi_R\frac{\partial}{\partial \psi_R} + \psi_I\frac{\partial}{\partial \psi_I}$

a násobení fází $X_4' = -\psi_R\frac{\partial}{\partial \psi_I} + \psi_I\frac{\partial}{\partial \psi_R}$

(rotace v (ψ_R, ψ_I))

a nyní

$$X_5 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\cancel{i}x}{2\lambda}\left(\psi_R\frac{\partial}{\partial \psi_i} - \psi_I\frac{\partial}{\partial \psi_R}\right)$$

$$X_6 = tx\frac{\partial}{\partial x} + t^2\frac{\partial}{\partial t} - \frac{t}{2}\left(\psi_R\frac{\partial}{\partial \psi_R} + \psi_I\frac{\partial}{\partial \psi_I}\right) + \frac{x^2}{4\lambda}\left(\psi_R\frac{\partial}{\partial \psi_i} - \psi_I\frac{\partial}{\partial \psi_R}\right)$$

Příklad na hledání PDR zadané symetrie

- pro jednoduchost hledejme lineární homogenní PDR 2. řádu pro skalární funkci $\psi(x^0,x^1,x^2,x^3)$ invariantní vůči Poincarého grupě s 10 inf. generátory

$$X_j = \varepsilon_{jk\ell}\, x^k \frac{\partial}{\partial x^\ell}, \quad j=1,2,3 \qquad \leftarrow \text{generátory prostor. rotací}$$

$$X_{3+j} = x^j \frac{\partial}{\partial x^0} + x^0 \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad j=1,2,3 \qquad \leftarrow \text{gen. Lorentzových transf.}$$

$$X_7 = \frac{\partial}{\partial x^0}, \quad X_{7+j} = \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad j=1,2,3 \qquad \leftarrow \text{gen. translací v čase a prostoru}$$

- přestože bychom v principu mohli hledat obecnou

$$R\left(x^\mu, \psi, \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}, \frac{\partial^2\psi}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right) = 0$$

omezíme se na hledání lin. hom. rce

$$(*) \qquad R = c\psi + a^\alpha \psi_{,\alpha} + b^{\mu\nu}\psi_{,\mu\nu} = 0 \qquad \text{kde } \psi_{,\alpha} \equiv \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} \text{ apod.}$$

(pozn: závislost na x^μ je vyloučena translacemi v x^μ)

členy typu $\psi_{,12}$ a $\psi_{,21}$ apod. jsou sice stejné, ale pro zjednodušení je nebudeme uvažovat odděleně

- uvažujme nejprve Lorentz. transformace, jejichž rozšíření do derivací je

$$X^{(2)}_{3+j} = X_{3+j} + \eta^j_\mu \frac{\partial}{\partial \psi_{,\mu}} + \eta^j_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial \psi_{,\mu\nu}}, \quad \text{kde} \quad \begin{aligned} \eta^j_\mu &= -\delta_{\mu 0}\psi_{,j} - \delta_{\mu j}\psi_{,0} \\ \eta^j_{\mu\nu} &= -\delta_{\mu j}\psi_{,0\nu} - \delta_{\mu 0}\psi_{,j\nu} \\ &\quad - \delta_{\nu 0}\psi_{,\mu j} - \delta_{\nu j}\psi_{,\mu 0} \end{aligned}$$

a inf. krit. dává (pro $j=1,2,3$)

$$X^{(2)}_{3+j}\left(c\psi + a^\mu\psi_{,\mu} + b^{\mu\nu}\psi_{,\mu\nu}\right)\Big|_{R=0} = a^\mu \eta^j_\mu + b^{\mu\nu}\eta^j_{\mu\nu}\Big|_{R=0} = 0$$

pokud vyjádříme ψ z $(*)$ ~~tak $|_{R=0}$~~ nedává žádné omezení

z čehož

$$0 = \underbrace{-a^0\psi_{,j} - a^j\psi_{,0}}_{\Downarrow} + \underbrace{b^{j\nu}\psi_{,0\nu} + b^{0\nu}\psi_{,j\nu} + b^{\mu 0}\psi_{,\mu j} + b^{\mu j}\psi_{,\mu 0}}$$

$a^0 = a^j = 0$
rce nemůže záviset lineárně na prvních derivacích

$$\psi_{,00}\,(b^{j0} + b^{0j}) = 0 \;\Rightarrow\; b^{0j} = b^{j0} = 0 \quad (\text{díky symetrii } b^{\mu\nu} = b^{\nu\mu})$$

$$\psi_{,01}\left[b^{j1} + b^{1j} + \delta_{j1}(b^{00} + b^{00})\right] = 0$$

$$\Rightarrow b^{12} = b^{13} = 0, \quad b^{00} + b^{11} = 0$$

a pod. pro $\psi_{,02}$ a $\psi_{,03}$ $\Rightarrow$ $b^{23} = 0$ $\quad b^{00} + b^{22} = 0$, $\quad b^{00} + b^{33} = 0$

- rotace již další podmínky nepřidají a tedy

$$R = c\psi + b^{00}(\psi_{,00} - \psi_{,11} - \psi_{,22} - \psi_{,33}) = 0$$

jediná konst $\frac{c}{b^{00}} \equiv m^2 \;\Rightarrow\; m^2\psi + \Box\psi = 0$ (Kleinova-Gordonova rovnice)

Využití bodových symetrií při řešení ODR

- znalost Lieovy grupy transformací, vůči které je invariantní obyčejná diferenciální rovnice (ODR), kterou máme vyřešit, nám často může pomoci
- konkrétně jednoparam. LGT, která není tzv. triviální symetrií (viz později), umožňuje buď snížit řád ODR o jedna, nebo rovnici 1. řádu vyřešit, tj. převést na integraci
- pokud známe r-param. LGT, vůči níž je zadaná ODR invariantní, mělo by jít v principu snížit řád o r stupňů, ale nelze to udělat postupně, to lze pouze pro tzv. řešitelné LGT

- základní trik:
  - převést ODR do jiných (vhodnějších) proměnných buď pomocí kanonických proměnných bodové symetrie nebo pomocí metody diferenciálních invariantů

- obě tyto metody jsou založeny na nalezení řešení parciálních diferenciálních rovnic (PDR) prvního řádu typu

$$Xr(x,y) = \xi(x,y)\frac{\partial r}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial r}{\partial y} = 0$$

nebo

$$Xs(x,y) = \xi(x,y)\frac{\partial s}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial r}{\partial y} = 1$$

- rovnice tohoto typu lze občas řešit pomocí metody charakteristik, kterou zde stručně shrneme.

(podrobnosti viz např. L.C. Evans: Partial Differential Equations) kap. 3

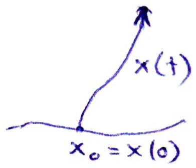
pro speciální případ

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x^i} = c(x,u)$$

pro neznámou skalární funkci $u = u(x)$

- metoda spočívá v hledání řešení podél tzv. charakteristiky, která vychází z určitého bodu x_0, kde je zadaná počáteční hodnota

- rovnice této charakteristiky jsou dány



$$\frac{dx^i(t)}{dt} = b^i(x(t)) \quad \text{pro } i=1,\dots,n \quad , x(0)=x_0$$

a řešení podél ní je dáno rovnicí

$$\frac{du(t)}{dt} = c(x(t),u(t)) \quad , \quad u(0)=u(x_0)$$

- rovnice charakteristiky lze též psát jako

$$\frac{dx^1}{b^1(x)} = \frac{dx^2}{b^2(x)} = \dots = \frac{dx^n}{b^n(x)}$$

jde o $n-1$ rovnic, jejichž řešení závisí na $n-1$ integračních konstantách. Lze ukázat, že těchto $n-1$ „konstant", zapsaných ovšem jako funkce x, dávají $n-1$ nezávislých řešení $r_j(x)$ rovnice $(*)$ pro $c(x,u)=0$ (tedy bez pravé strany)

tj. $$\sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial r_j(x)}{\partial x^i} = 0 \quad \text{pro } j=1,\dots,n-1$$

(v tomto případě je totiž $\frac{du(t)}{dt}=0$ a tedy $u(t)=\text{konst}=u(x_0)$ podél charakteristiky)

- pokud $c(x,u)\neq 0$, pak pokud je $s(x)$ řešením, bude obecným řešením $s(x)+\sum_{j=1}^{n-1}\alpha^j r_j(x)$ a záleží pak na počátečních podmínkách

- pokud $c(x,u)=1$, pak lze položit

$$dt = \frac{ds}{1} = \frac{dx^i}{b^i(x)} \quad \text{pro určité } i \quad \text{a vyintegrovat}$$

- podrobnější příklad na použití této metody bude uveden níže při hledání kanonických proměnných

Kanonické proměnné a jejich využití

- uvažujme nejprve obecnou změnu proměnných ODR, tj. přechod od (x,y) k (r,s), a uvažujme dále, že máme dán infinitezimální operátor X v proměnných (x,y) tj.

$$X^{(x,y)} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

- v nových proměnných bude tento operátor dán jako

$$X^{(r,s)} = \alpha(r,s)\frac{\partial}{\partial r} + \beta(r,s)\frac{\partial}{\partial s}$$

- Jak $\alpha(r,s)$ a $\beta(r,s)$ souvisí s ξ a η, pokud $r=r(x,y)$ a $s=s(x,y)$?
  - uvažujme funkci $F(r,s)$ a zapůsobme

$$X^{(r,s)}F(r,s) = \alpha(r,s)\frac{\partial F}{\partial r} + \beta(r,s)\frac{\partial F}{\partial s} \qquad (1)$$

na druhou stranu můžeme tuto funkci uvažovat jako funkci proměnných (x,y), neboli $F(r,s) = F(r(x,y),s(x,y))$ a zapůsobit $X^{(x,y)}$, dostaneme

$$X^{(x,y)}F(r(x,y),s(x,y)) = \xi(x,y)\left(\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}\right) + \eta(x,y)\left(\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}\right)$$

$$= X^{(x,y)}r(x,y)\frac{\partial F}{\partial r} + X^{(x,y)}s(x,y)\frac{\partial F}{\partial s} \qquad (2)$$

- porovnáním výrazů (1) a (2) vidíme, že

$$\alpha(r(x,y),s(x,y)) = X^{(x,y)}r(x,y)$$
$$\beta(r(x,y),s(x,y)) = X^{(x,y)}s(x,y)$$

nebo též můžeme psát, že

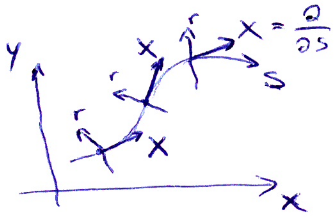
$$\boxed{\alpha(r,s) = X^{(x,y)}r(x,y)\Big|_{\substack{x=x(r,s)\\ y=y(r,s)}} \quad \text{a} \quad \beta(r,s) = X^{(x,y)}s(x,y)\Big|_{\substack{x=x(r,s)\\ y=y(r,s)}}}$$

- <u>kanonické proměnné</u> jsou takové proměnné $r(x,y)$ a $s(x,y)$, pro které je infinitezimální operátor generátorem translace v jedné proměnné, např. v s, tj. $X^{(r,s)} = \frac{\partial}{\partial s}$

tj. $\alpha=0$ a $\beta=1$ a jsou tedy dány rovnicemi

$$\boxed{X^{(x,y)}r(x,y) = 0 \quad \text{a} \quad X^{(x,y)}s(x,y) = 1}$$

- jde vlastně o „přirozené" proměnné pro bodovou symetrii gen. $X^{(x,y)}$



Př.: hledejme kanonické proměnné pro infinit. operátor rotace v rovině (x,y) daný jako $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$

Řešme nejprve

$$X\, r(x,y) = 0 \quad \text{neboli} \quad -y\frac{\partial r}{\partial x} + x\frac{\partial r}{\partial y} = 0$$

metoda charakteristik dává rovnice

(3) $$\frac{dx(t)}{dt} = -y(t)\,, \quad \frac{dy(t)}{dt} = x(t) \quad \text{a} \quad \frac{dz(t)}{dt} = 0 \quad \text{kde } z(t) = r(x(t),y(t))$$

s počátečními podmínkami $x(0) = x_0\,, y(0) = y_0$ a $z(0) = g(x_0,y_0)$ je hodnota r v bodě (x_0,y_0)

protože při hledání kanonických proměnných nemáme určené kde charakteristika začíná a jaká je hodnota podél určité charakteristiky, můžeme volit jednodušší poč. podmínky např. volbou, že charakteristiky budou začínat v lib. bodě podél polopřímky $x_0>0$, $y_0=0$ (v tomto případě to funguje, ale někdy je nutno volit jiný počáteční bod) a hodnota $z(t=0)$ bude dána jako jistá funkce $g(x_0)$

Řešení (3) pak je $x(t) = x_0 \cos t$, $y(t) = x_0 \sin t$ a $z(t) = g(x_0)$

Zvolíme-li nyní jistý bod (x,y), pak tomuto bodu bude odpovídat jisté x_0 a t dané jako $x_0 = \sqrt{x^2+y^2}$, $t = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ a tedy řešení $Xr = 0$ lze psát jako $r(x,y) = r(x(t),y(t)) =$

$$= z(t) = g(x_0) = g(\sqrt{x^2+y^2})$$

tj. může to být libovolná funkce výrazu $\sqrt{x^2+y^2}$

standardní volbou je samozřejmě přímo $r = \sqrt{x^2+y^2}$

kanonické proměnné

Druhá kanonická proměnná $s(x,y)$ je dána rovnicí

$$X s(x,y) = -y\frac{\partial s}{\partial x} + x\frac{\partial s}{\partial y} = 1$$

Rovnice charakteristik jsou stejné, jen nyní bude

$$\frac{dz(t)}{dt} = 1 \quad , \text{ kde nyní } z(t) = s(x(t), y(t))$$

s poč. podmínkou $\quad z(t) = g(x_0)$

opět libovolná funkce

Řešení nyní je ($x(t)$ a $y(t)$ jsou stejné jako u $r(x,y)$)

$$z(t) = g(x_0) + t$$

a tedy v bodě (x,y) bude obecné řešení

$$s(x,y) = g(x_0) + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \underbrace{g(\sqrt{x^2+y^2})}_{\substack{\text{obecné}\\ \text{řešení } Xr=0}} + \underbrace{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}_{\substack{\text{partikulární řešení}\\ Xs=1}}$$

Obvyklá volba kanonické proměnné $s(x,y)$ je

$$s(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \varphi$$

Tj. kanonickými proměnnými pro rotace v rovině jsou polární souřadnice (r, φ)

Totéž bychom dostali řešením alternativní rovnice charakteristiky

$$dt = \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow x\,dx = -y\,dy \Rightarrow x^2 = -y^2 + 2C$$

kde C je libovolná integrační konstanta, kterou můžeme zapsat jako libovolnou funkci, např. volbou $C = \frac{r^2}{2}$ dostaneme $r = \sqrt{x^2+y^2}$ (podstatná je kombinace x^2+y^2)

Pro $s(x,y)$ je alternativní rovnice např.

$$dt = \frac{ds}{1} = \frac{dy}{x} \quad , \text{ kde } x \text{ je dáno podél charakteristiky}$$

jako $x = \sqrt{r^2-y^2}$ a tedy

$$ds = \frac{dy}{\sqrt{r^2-y^2}} \Rightarrow s = \operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{r^2-y^2}} + g(x_0) = \varphi + \varphi_0$$

obvykle volíme $\varphi_0 = 0$.

Použití kanonických proměnných k řešení ODR 1. řádu

- mějme ODR 1. řádu

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (1)$$

a 1-par. LGT generovanou

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

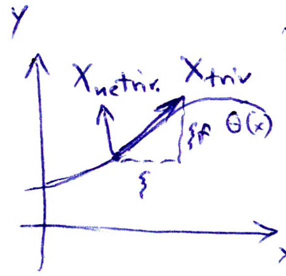
vůči níž je rovnice (1) invariantní.

- bodová symetrie generovaná X nám může pomoci při hledání řešení (1) pokud

a) jde o <u>netriviální bod. symetrii</u>, tj.

pokud bude $\eta(x,y) \neq \xi(x,y) f(x,y)$

(nebo obecněji $\eta(x,\theta(x)) \neq \xi(x,\theta(x))\,\theta'(x)$, kde $\theta(x)$ je řešení příslušné ODR, kterou se snažíme řešit)



Pokud totiž $\eta(x,y) = \xi(x,y) f(x,y)$, jde o triviální symetrii, neboť pak infinit. kritérium

$$X^{(1)}\left(y_1 - f(x,y)\right)\Big|_{y_1=f} = 0$$

je splněno pro lib. $\xi(x,y)$. Vyzkoušejte si to :-)

$\left(\eta^{(1)} = \xi(x,y)\, D_x f + (D_x \xi)(f - y_1)\right)$

Geometricky to znamená, že X směřuje podél řešení $y=\theta(x)$ a převádí řešení na stejné řešení.

b) <u>umíme najít kanonické proměnné snáze</u>, než vyřešit rovnici $y_1 = f(x,y)$, tj. buď proměnné uhodneme, nebo je řešení rovnic charakteristik pro $Xr=0$ a $Xs=1$ tj. $\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{ds}{1}$ snadné.

Pozn: 1) všimněte si, že pokud máme triviální symetrii, bude rce charakt. $\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\xi f}$ neboli $\frac{dy}{dx} = f$, tj. nepomůžeme si.

2) lze ukázat, že pro ODR 1. řádu vždy existuje netriviální bod. symetrie, ale je obecně obtížné ji najít, pokud ji nelze uhodnout (hledání symetrií je obtížnější než rovnici vyřešit)

Př. mějme ODR $y_1 = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$, kde f je libovolná funkce

„vidíme", že tato rovnice je invariantní vůči škálování

$$\tilde{x} = \alpha x, \quad \tilde{y} = \alpha y \quad \text{s generátorem} \quad X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \qquad (*)$$

(ověřte si to i přes infinitezimální kritérium)

kanonické proměnné jsou dané rovnicemi

naše volba „konst"

$$Xr(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln x = \ln y - \ln r \Rightarrow r = \frac{y}{x}$$

$$Xs(x,y) = 1 \Rightarrow \frac{ds}{1} = \frac{dy}{y} \Rightarrow s = \ln y$$

naše volba, mohli jsme použít i $\frac{ds}{1} = \frac{dx}{x}$
a tedy mít $s = \ln x$ a dostali bychom
níže jinou funkci $G(r)$, ale stejné řešení $y(x)$

abychom převedli $y_1 = f\left(\frac{y}{x}\right)$ do kanonických proměnných, vyjádříme $y = e^s$ a $x = \frac{e^s}{r}$ a spočteme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{D_r(e^s)}{D_r\left(\frac{e^s}{r}\right)} = \frac{\frac{ds}{dr} e^s}{\frac{ds}{dr}\frac{e^s}{r} - \frac{e^s}{r^2}} = \frac{r^2 \frac{ds}{dr}}{r\frac{ds}{dr} - 1} = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(r)$$

dosadíme z rovnice $y_1 = f\left(\frac{y}{x}\right)$

a tedy dostáváme rovnici

$$\frac{ds}{dr} = \frac{f(r)}{f(r)r - r^2} = G(r)$$

což bychom měli očekávat, neboť je-li $y_1 = f\left(\frac{y}{x}\right)$ invariantní vůči $(*)$, pak nová rovnice v (r,s) musí být invariantní vůči $X^{(r,s)} = \frac{\partial}{\partial s}$ a tedy explicitně nezávislá na s.

Řešení původní rovnice je tak dáno implicitně pomocí integrace této rovnice

$$s(x,y) = \int^{r(x,y)} G(r')\,dr' + C$$

Speciálně pro $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$ bude $G(r) = \frac{r}{r^2 - r^2}$ a nelze integrovat.

Důvod je, že v tomto případě jde o triviální bod. symetrii neboť $\frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x} = f$, ovšem v tomto případě lze přímo integrovat původní rovnici

Pokud $f(\frac{y}{x}) \neq \frac{y}{x}$, dostaneme tímto postupem řešení, umíme-li zintegrovat $G(r)$ a pak vyjádřit $y = y(x)$

Např. pro $f(x) = \frac{x}{y}$ bude $f(r) = \frac{1}{r}$,

$$G(r) = \frac{1}{r(1-r^2)} \quad \text{a tedy} \quad \ln y = s = \ln r - \frac{1}{2}\ln(r^2-1) + \ln C$$

z čehož lze vyjádřit $\quad y = \pm\sqrt{x^2+c^2}$

Ovšem pro $f(x) = \frac{x}{x-y} = \frac{1}{1-\frac{y}{x}}$ bude $G(r) = \frac{1}{r-r^2+r^3}$

a dostaneme implicitní rovnici

$$\ln y = s = -\frac{1}{2}\ln(r^2-r+1) + \ln r + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2r-1}{\sqrt{3}} + c$$

ze které $y = y(x)$ nelze vyjádřit (porovnejte s řešením, které vrátí Mathematica)

Určení ODR 1. řádu invariantní vůči zadané bod. symetrii

- chceme nalézt ODR $y_1 = f(x,y)$ invariantní vůči bod. symetrii generované $X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$
- přestože bychom mohli přímo řešit rovnici pro $f(x,y)$ kterou bychom získali z infinit. kritéria $X^{(1)}(y_1 - f(x,y))\Big|_{y_1=f} = 0$ je mnohdy jednodušší najít nejprve kanonické proměnné (r,s) pomocí $Xr = 0$ a $Xs = 1$. V nich je pak nejobecnější ODR 1. řádu inv. vůči $X^{(r,s)} = \frac{\partial}{\partial s}$ dána jednoduše jako $\frac{ds}{dr} = G(r)$, kde G je lib. funkce

a pak najít $y_1 = f(x,y)$ z $\frac{ds}{dr} = \frac{D_x s(x,y)}{D_x r(x,y)} = G(r(x,y))$

Př. pro $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ bychom samozřejmě dostali $r = \frac{y}{x}$, $s = \ln y$

a tedy $\frac{ds}{dr} = \frac{\frac{y_1}{y}}{-\frac{y}{x^2} + \frac{y_1}{x}} = \frac{y_1}{ry_1 - r^2} = G(r) \Rightarrow y_1 = \frac{r^2 G(r)}{rG(r)-1} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

což je tedy nejobecnější ODR 1. řádu inv. vůči škálování $\begin{array}{l}\tilde{x} = \alpha x \\ \tilde{y} = \alpha y\end{array}$.

Snížení řádu ODR pomocí kanonických proměnných

- máme-li ODR vyššího řádu
$$\frac{d^k y}{dx^k} = y_k = f(x, y, y_1 \cdots y_{k-1}) \qquad (*)$$
invariantní vůči bod. symetrii generované $X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}$,
která je netriviální, tj. $\frac{\eta}{\xi} \neq \theta'(x)$, kde $\theta(x)$ je řešení $(*)$,
pak přechodem ke kanonickým proměnným (r, s)
dostaneme rovnici
$$\frac{d^k s}{dr^k} = G\left(r, \frac{ds}{dr}, \ldots, \frac{d^{k-1}s}{dr^{k-1}}\right)$$
kde G nezávisí explicitně na s, neboť musí být inv. vůči $X = \frac{\partial}{\partial s}$.
a tedy substitucí $z = \frac{ds}{dr}$ dostaneme rovnici o stupeň nižší
$$\frac{d^{k-1} z}{dr^{k-1}} = G\left(r, z, \frac{dz}{dr}, \cdots \frac{d^{k-2} z}{dr^{k-2}}\right)$$
a najdeme-li její řešení $z = \phi(r)$, pak řešení původní rovnice (1) je implicitně dáno pomocí
$$s(x, y) = \int^{r(x,y)} \phi(r')\, dr' + C$$

Př. uvažujme lineární homogenní ODR 2. řádu
$$y_2 + p(x)\, y_1 + q(x)\, y = 0$$
která je invariantní vůči škálování závislé proměnné,
tj. vůči transf. $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = \alpha y$ generované $X = y \frac{\partial}{\partial y}$

kanonické proměnné jsou např. $r = x$, $s = \ln y$
neboli $x = r$, $y = e^s$ a tedy
$$\frac{dy}{dx} = \frac{D_r y(r,s)}{D_r x(r,s)} = e^s \frac{ds}{dr}$$
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{D_r\left(e^s \frac{ds}{dr}\right)}{D_r x} = e^s \left[\frac{d^2 s}{dr^2} + \left(\frac{ds}{dr}\right)^2\right]$$
Dostaneme tak rovnici
$$e^s \left[\frac{d^2 s}{dr^2} + \left(\frac{ds}{dr}\right)^2 + p(r) \frac{ds}{dr} + q(r)\right] = 0$$

zavedení proměnné $z = \frac{ds}{dr} = \frac{y_1}{y}$ (tzv. Riccatiho transformace)

nakonec máme rovnici Riccatiho typu, která je sice o řád nižší, ale nelineární

$$\frac{dz}{dr} + z^2 + p(r)z + q(r) = 0$$

Speciálně pro lin. harmonický oscilátor $y_2 + \omega^2 y = 0$

je $p(x) = 0$, $q(x) = \omega^2$ a tedy

$$\frac{dz}{dr} + z^2 + \omega^2 = 0$$

(Pozn: jde o rovnici inv. vůči transl. v r čili v x)

kterou lze přímo integrovat a řešení je

$$\frac{ds}{dr} = z(r) = -\omega \operatorname{tg} \omega (r - c_1)$$

a druhou integrací

$$\ln y = s(r) = \ln \cos \omega (r - c_1) + \ln A$$

neboli $$y = A \cos \omega (x - c_1)$$, jak bychom očekávali.

Pozn.: 1) není náhodou, že lin. harm. oscilátor bylo možné vyintegrovat úplně, neboť rovnice $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$ je inv. vůči 2-par. LGT s generátory $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ a $X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}$ která je řešitelná (viz níže), neboť $[X_1, X_2] = 0$.

2) Při řešení $y_2 + \omega^2 y = 0$ jsme mohli začít i s $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$.

kanonické prom. jsou $r = y$, $s = x$

a dostali bychom $$\frac{d^2 s}{dr^2} = \omega^2 r \left(\frac{ds}{dr}\right)^3$$ (ověřte!)

neboli $$\frac{dz}{dr} = \omega^2 r z^3$$

(Pozn. jde o rovnici inv. vůči škálování $\tilde{z} = \frac{1}{\alpha} z$, $\tilde{r} = \alpha r$ což odpovídá škálování $\tilde{y} = \alpha y$)

a postupnou integrací bychom opět dostali

řešení $y = A \sin \omega (x - c)$ (vyzkoušejte si to)

Určení ODR vyššího řádu invariantní vůči zadané grupě symetrií

- máme-li víceparam. grupu bod. symetrií a hledáme-li ODR inv. vůči této grupě, aplikujeme postupně pomocí infinit. kritéria všechny infin. operátory (lin. nezávislé)
  tj. hledáme $y_k = f(x, y, y_1 \dots y_{k-1})$ a pro všechny X_j, $j = 1, \dots, r$ musí platit
  $$X_j^{(k)}(y_k - f)\Big|_{y_k = f} = 0$$
- pro jednoparam. grupu nebo při aplikaci konkrétního X_j můžeme též využít kanonické proměnné (r, s), neboť pak je $X^{(r,s)} = \frac{\partial}{\partial s}$ a obecná ODR k-tého řádu inv. vůči translaci v s bude
  $$\frac{d^k s}{dr^k} = G\left(r, \frac{ds}{dr}, \dots, \frac{d^{k-1}s}{dr^{k-1}}\right)$$
  a tuto rovnici pak převedeme do (x, y)

Př. hledejme ODR 2. řádu invariantní při Galileově transformaci generované $X = x\frac{\partial}{\partial y}$ $\Rightarrow$ $X^{(2)} = x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y_1}$ (ověřte)

obecnou rovnici zapíšeme jako $y_2 = f(x, y, y_1)$

a) řešení pomocí kanonických proměnných

$$\left.\begin{array}{lll} Xr = 0 & \Rightarrow & r = x \\ Xs = 1 & \Rightarrow & s = \frac{y}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{ds}{dr} = \frac{xy_1 - y}{x^2}, \quad \frac{d^2s}{dr^2} = \frac{-2(xy_1 - y)}{x^3} + \frac{y_2}{x}$$

Dosazením do $\frac{d^2s}{dr^2} = G\left(r, \frac{ds}{dr}\right)$ a úpravou dostaneme

$$y_2 = x\underbrace{G}_{\text{lib. fce}}\left(x, \frac{xy_1 - y}{x}\right) + 2\frac{xy_1 - y}{x^2} = \underbrace{H}_{\text{nebo zde lib. fce}}(x, xy_1 - y)$$

b) pomocí infinit. kritéria bychom dostali

$$X^{(2)}(y_2 - f(x, y, y_1))\Big|_{y_2 = f} = -x\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$$

lze řešit metodou charakteristik $\Rightarrow$ 2 nezávislá řešení $f_1 = x$, $f_2 = xy_1 - y$

obecná $f(x, y, y_1)$ pak může být lib. fcí těchto dvou nezávislých řešení a tedy dostáváme totéž jako pomocí kanonických proměnných

Metoda diferenciálních invariantů

- pokud máme ODR k-tého řádu
$$y_k = f(x, y, y_1, \dots, y_{k-1}) \qquad (1)$$
která je invariantní vůči 1-par. LGT generované
$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \quad , \text{ tj. platí } X^{(k)}(y_k - f)\Big|_{y_k = f} = 0$$
pak lze obecně ukázat, že rovnici (1) je ekvivalentní (lze přepsat) rovnici
$$G(u, v_1, v_2 \dots v_k) = 0$$
kde $u, v_1, \dots v_k$ jsou tzv. invarianty této 1-par. LGT splňující
$$X^{(k)}u = 0 \, , \quad X^{(k)}v_i = 0 \quad , i = 1, \dots, k$$
(pro operátor $X^{(k)} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}\frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \eta^{(k)}\frac{\partial}{\partial y_k}$ je $X^{(k)}u = 0$ PDR pro neznámou fci $u(x, y, y_1, \dots, y_k)$, která má $k+1$ nezávislých řešení zde označených $u, v_1 \dots v_k$)
- tyto invarianty lze hledat buď přímo řešením $X^{(k)}u = 0$, nebo stačí najít dva dané rovnicemi
$$Xu(x,y) = 0$$
$$X^{(1)}v_1(x, y, y_1) = 0$$
a ostatní spočítat pomocí
$$v_2 = \frac{dv_1}{du} = \frac{D_x v_1}{D_x u} \, , \quad \dots \quad , v_k = \frac{dv_{k-1}}{du} = \frac{D_x v_{k-1}}{D_x u}$$
Takto určeným invariantům říkáme <u>diferenciální invarianty</u>, pro které zřejmě platí, že $\frac{\partial v_k}{\partial y_k} \neq 0$ pokud $\frac{\partial v_1}{\partial y_1} \neq 0$ neboť např.
$$v_2 = \frac{D_x v_1}{D_x u} = \frac{\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}y_1 + \frac{\partial v_1}{\partial y_1}y_2}{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}y_1} = f_1(x, y, y_1) + f_2(x, y, y_1)\, y_2$$
a pod. pro vyšší derivace.
- ukažme si nyní, že jde opravdu o invarianty, tj. že platí $X^{(j)}v_j = X^{(k)}v_j = 0$, pokud $Xu = 0$ a $X^{(1)}v_1 = 0$.
  - ukažme nejprve, že obecně platí:
  Pokud $X^{(j-1)}v(x, y, y_1, \dots, y_{j-1}) = 0$ a $X^{(j-1)}w(x, y, y_1, \dots, y_{j-1}) = 0$,
  pak $X^{(j)}\frac{dw}{dv} = 0$.

spočtěme nejprve výraz (předpokládáme, že funkce F nezávisí na y_j, protože ani v a w nezávisí na y_j a vyšších derivacích)

(✱)

$$[X^{(j)}, D_x]\, F(x,y,y_1,\dots,y_{j-1}) =$$

$$= \left[\xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}\frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \eta^{(j)}\frac{\partial}{\partial y_j} , \frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + \dots + y_j\frac{\partial}{\partial y_{j-1}} + y_{j+1}\frac{\partial}{\partial y_j} + \dots\right]F =$$

(všechny druhé derivace se odečtou, zůstanou členy typu $\eta^{(i)}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(y_i\frac{\partial}{\partial y_{i-1}}\right) = [D_x\eta^{(i-1)} - (D_x\xi)y_i]\frac{\partial}{\partial y_{i-1}}$ a dále členy s $D_x\xi, D_x\eta \dots$)

$$= \Big\{[\cancel{D_x\eta} - (D_x\xi)y_1]\frac{\partial}{\partial y} + [\cancel{D_x\eta^{(1)}} - (D_x\xi)y_2]\frac{\partial}{\partial y_2} + \dots + [\cancel{D_x\eta^{(j-1)}} - (D_x\xi)y_j]\frac{\partial}{\partial y_{j-1}} -$$

$$- (D_x\xi)\frac{\partial}{\partial x} - \cancel{(D_x\eta)\frac{\partial}{\partial y}} - \cancel{(D_x\eta^{(1)})\frac{\partial}{\partial y_1}} - \dots - \cancel{(D_x\eta^{(j-1)})\frac{\partial}{\partial y_{j-1}}}\Big\} F =$$

$$= -(D_x\xi)(D_xF)$$ (zde můžeme psát opět obecné D_xF, neboť vyšší derivace než $\frac{\partial}{\partial y_{j-1}}$ stejně nepřispějí)

Nyní se vraťme k výrazu

$$X^{(j)}\frac{dw}{dv} = X^{(j)}\frac{D_xw}{D_xv} = (D_xv)^{-2}\left[(D_xv)(X^{(j)}D_xw) - (D_xw)(X^{(j)}D_xv)\right] =$$

$$= (D_xv)^{-2}\Big[(D_xv)\,D_x(\underbrace{X^{(j)}w}_{\overset{0}{\text{dle předpokl.}}}) - \cancel{(D_xv)(D_x\xi)(D_xw)} - (D_xw)\,D_x(\underbrace{X^{(j)}v}_{\overset{0}{\text{dle předpokladu}}}) + \cancel{(D_xw)(D_x\xi)(D_xv)}\Big] = 0$$

zde jsme použili $X^{(j)}D_xF = D_x(X^jF) - (D_x\xi)(D_xF)$ plynoucí z (✱)

Dokázali jsme tedy, že $X^{(j)}\frac{dw}{dv} = 0$ a protože pro u platí $Xu(x,y) = 0$ a tedy i $X^{(j)}u = 0$ pro lib. $j \geq 1$, dokázali jsme i $X^{(j)}v_j = X^{(j)}\frac{dv_{j-1}}{du} = 0$, neboť v_{j-1} závisí nejvýše na y_{j-1} a platí pro ně $X^{(j-1)}v_{j-1} = 0$

- invarianty jsou ideální, chceme-li konstruovat diferenciální rovnice k-tého řádu invariantní vůči zadané 1-par. LGT. Stačí najít všechny nezávislé invarianty pomocí $X^{(k)}U = 0$ (je jich $k+1$), např. výše uvedené diferenciální inv. $u, v_1, \dots, v_k$ a obecná ODR k-tého řádu inv. vůči $X^{(k)}$ pak bude
$$G(u, v_1, \dots v_k) = 0$$
kde G je libovolná funkce (Inf. kritérium je splněno automaticky)

Redukce řádu ODR pomocí diferenciálních invariantů

- z výše uvedeného je zřejmé, že z ODR k-tého řádu

$$R(x, y, y_1 \dots y_k) = 0,$$

která je invariantní vůči 1-par. LGT generované $X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}$, dostaneme přechodem k diferenciálním invariantům

$$X u = 0, \quad X^{(1)} v_1 = 0, \quad \dots \quad, X^{(k)} v_k = 0 \quad, \quad v_j = \frac{d v_{j-1}}{du}, \ j \geq 2$$

rovnici o jeden řád nižší, tj.

$$G\left(u, v_1, \frac{dv_1}{du}, \dots \frac{d^{k-1} v_1}{du^{k-1}}\right) = 0$$

pro jisté G plynoucí z $R = 0$ a řešení $y = y(x)$ původní rovnice pak bude dáno implicitně pomocí ODR 1. řádu

$$v_1(x, y, y_1) = \phi(u(x,y), c_1, \dots, c_{k-1})$$

kde ϕ je řešení $G = 0$ a $c_1, \dots c_{k-1}$ jsou integrační konstanty.

Jde o ODR 1. řádu invariantní vůči 1-par. LGT gener. X a lze tedy k jejímu řešení využít původní symetrie (uvědomte si, že v_1 a u jsou invarianty, tedy i $v_1 = \phi(u)$ je invariantní vůči X)

Pozn. rovnici $G(u, v_1 \dots) = 0$ lze určit tak, že postupně vyjádříme derivace $y_{j+1} = \frac{d^j v_1}{du^j} A_j(x, y, y_1 \dots y_j) + B_j(x, y, y_1 \dots y_j)$ a dosadíme do $R = 0$.

Př. uvažujme opět lin. homog. rovnici 2. řádu

$$R = y_2 + p(x) y_1 + q(x) y = 0,$$

která je inv. vůči škálování v y, tj. $X = y \frac{\partial}{\partial y}$

a tedy $X^{(2)} = y \frac{\partial}{\partial y} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$

Invarianty jsou $u = x$, $v_1 = \frac{y_1}{y}$ a $\frac{dv_1}{du} = \frac{D_x v_1}{D_x u} = \frac{y_2}{y} - \left(\frac{y_1}{y}\right)^2$

a tedy $y_2 = y \frac{dv_1}{du} + y\left(\frac{y_1}{y}\right)^2$, $y_1 = y v_1$

z čehož $R = y\left[\frac{dv_1}{du} + v_1^2 + p(u) v_1 + q(u)\right] = 0$ (opět rovnice Ricattiho typu)

a známe-li $v_1 = \phi(u, c_1) = \frac{y_1}{y}$ bude $y = c_2 e^{\int \phi(x, c_1)\, dx}$

r-parametrické LGT a redukce ODR k-tého řádu

- obecně neplatí, že invariance ODR vůči r-par. LGT vede k redukci o r řádů + r kvadratur (integrálů), neboť při aplikaci jedné 1-par. podgrupy dostaneme rci o 1 řád nižší, ta však už nemusí být invariantní vůči ostatním jednopar. podgrupám
- ovšem pro r-par. LGT, která je řešitelná, je tato redukce možná
- o r-par. LGT říkáme, že je řešitelná, pokud je její LA inf. gen. řešitelná, tj. $\exists$ báze $X_1, \dots X_r$ pro kterou

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{j-1} c_{ij}^k X_k \quad , 1 \le i \le j \quad , j = 2, \dots, r$$

tj. $[X_1, X_2] = c_{12}^1 X_1$, $[X_1, X_3] = c_{13}^1 X_1 + c_{13}^2 X_2$ atd.

pozn: stejné komutační relace platí i pro k-té rozšíření $X_1^{(k)} \dots X_r^{(k)}$

- jinými slovy existuje řetězec podalgeber

$$\{0\} = \mathcal{G}^{(0)} \subset \mathcal{G}^{(1)} \subset \dots \subset \mathcal{G}^{(r)} = \mathcal{G} = \text{LA příslušné grupy}$$

takových, že pro $\forall k$ je $\dim \mathcal{G}^{(k)} = k$ a $\mathcal{G}^{(k-1)}$ je ideálem $\mathcal{G}^{(k)}$ (normální podalgebrou)

tj. $[\mathcal{G}^{(k-1)}, \mathcal{G}^{(k)}] \subset \mathcal{G}^{(k-1)}$

[Na úrovni grupy $\exists$ řetězec $\{e\} = G^{(0)} \subset G^{(1)} \dots \subset G^{(r-1)} \subset G^{(r)} = G$ takový, že pro $\forall k = 1, \dots r$ je $G^{(k)}$ k-rozměrná podgrupa G a $G^{(k-1)}$ je normální podgrupou $G^{(k)}$, tj. $hG^{(k-1)}h^{-1} \subset G^{(k-1)}$]

- platí: Každá abelovská LA je řešitelná. (triviální)

  Každá dvourozměrná LA je řešitelná, neboť

  je-li $\{X_1, X_2\}$ lib. báze, pak vezmeme-li $Y = [X_1, X_2] = aX_1 + bX_2$ pak pro lib. $Z = c_1 X_1 + c_2 X_2$ dostaneme

$$[Y, Z] = c_1 [Y, X_1] + c_2 [Y, X_2] = (c_2 a - c_1 b) Y \quad \text{a tedy}$$

  $\mathcal{L}\{Y\}$ je ideálem dané LA.

pozn. 3-rozm. LA nemusí být řešitelná (např. SO(3))

ale může být, např. ISO(2) = rotace a translace v rovině, neboli Euklidovská grupa $X_1 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_3 = \frac{\partial}{\partial y}$

$\mathcal{G}^{(1)} = \mathcal{L}\{X_2\}$

$\mathcal{G}^{(2)} = \mathcal{L}\{X_2, X_3\}$ $\Leftarrow$

	X_1	X_2	X_3
X_1	0	$-X_3$	X_2
X_2	X_3	0	0
X_3	$-X_2$	0	0

Redukce ODR k-tého řádu invariantní vůči 2-par. LGT

- nechť $\frac{d^k y}{dx^k} = f(x, y, y_1, \dots y_{k-1})$ je inv. vůči LGT generované $[X_1, X_2] = \lambda X_1$ $(*)$
- vezmeme X_1 a nalezneme $X_1 u = 0$, $X_1^{(1)} v_1(x, y, y_1) = 0$ a $v_2 = \frac{dv_1}{du}$ splňující $X_1^{(2)} v_2 = 0$

   $\Rightarrow$ redukce na $\frac{d^{k-1} v_1}{du^{k-1}} = H\left(u, v_1, \dots \frac{d^{k-2} v_1}{du^{k-2}}\right)$ $(**)$

- nyní využijeme komut. relací $(*)$:

$$X_1 X_2 u = X_2 X_1 u + \lambda X_1 u = 0 \Rightarrow X_2 u = \alpha(u)$$

$$X_1^{(1)} X_2^{(1)} v_1 = X_2^{(1)} X_1^{(1)} v_1 + \lambda X_1^{(1)} v_1 = 0 \Rightarrow X_2^{(1)} v_1 = \beta(u, v_1)$$

a pod. $X_1^{(2)} X_2^{(2)} v_2 = 0 \Rightarrow X_2^{(2)} v_2 = \gamma(u, v_1, v_2)$

- protože $y_k = f(x, y \dots y_{k-1})$ je inv. vůči $(*)$ a $(**)$ je ekvivalentní s $y_k = f$ musí být $(**)$ též inv. vůči $(*)$ a tedy

$$X_2^{(k-1)}\left(\frac{d^{k-1} v_1}{du^{k-1}} - H\right)\Bigg|_{\frac{d^{k-1} v_1}{du^{k-1}} = H} = 0$$

- lze ukázat (viz Olver, kap. 2), že $X_2^{(1)}$ a $X_2^{(2)}$ lze zapsat pomocí proměnných u, v_1, v_2 jako

$$X_2^{(1)} = \alpha(u)\frac{\partial}{\partial u} + \beta(u, v_1)\frac{\partial}{\partial v_1}, \quad X_2^{(2)} = X_2^{(1)} + \gamma(u, v_1, v_2)\frac{\partial}{\partial v_2}$$

[když se omezíme na podprostor (u, v_1, v_2), což můžeme, protože $(**)$ ani $X_2 u, \dots, X_2^{(2)} v_2$ nezávisí na posledni prom. $t: X_1 t = 1$]

přičemž $(**)$ je inv. vůči grupě generované $X_2^{(1)}$

- pokračujeme tedy dále nalezením invariantů $X_2^{(1)} U = 0$, $X_2^{(2)} V_1 = 0$

   a redukujeme na $\frac{d^{k-2} V_1}{dU^{k-2}} = I\left(U, V_1, \dots \frac{d^{k-3} V_1}{dU^{k-3}}\right)$

- pokud $V_1 = \phi(U, c_1 \dots c_{k-2})$ je řešení, pak $V_1(u, v_1, v_2) = \phi(U(u, v_1), c_1 \dots c_{k-2})$ je ODR 1. řádu inv. vůči grupě gener. $X_2^{(1)}$ a redukuje se tedy na $v_1 = \psi(u, c_1 \dots c_{k-1})$ a pod. dostáváme

$$v_1(x, y, y_1) = \psi(u(x, y), c_1 \dots c_{k-1}) \quad \text{inv. vůči } X_1$$

   a opět integrujeme

- máme-li rci 2. řádu, je třeba $(**)$ přímo vyintegrovat např. pomocí kanonických prom.

- pokud máme r-par. LGT a ODR $k > r$, pak se postup opakuje r-krát

Př. metoda variace konstant pro ~~ne~~ lin. nehomog. rci k-tého řádu

$$L(y) = y_k + p_1(x) y_{k-1} + \dots + p_k(x) y = g(x)$$

plyne z invariance této rce vůči k-par. grupě

$$\tilde{x} = x$$
$$\tilde{y} = y + \varepsilon_1 \phi_1(x) + \dots + \varepsilon_k \phi_k(x)$$

s inf. gener. $X_i^{(k)} = \phi_i(x) \frac{\partial}{\partial y} + \phi_i'(x) \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \phi_i^{(k)}(x) \frac{\partial}{\partial y_k}$

která je abelovská a tedy řešitelná.

Řešení má tvar $y(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \phi_i(x) + \sum_{i=1}^{k} \phi_i(x) \int \frac{W_i(x)}{W_{\phi_1 \dots \phi_k}(x)} g(x)\, dx$

kde wronskián $W_{\phi_1 \dots \phi_k}(x) = \begin{vmatrix} \phi_1 & \dots & \phi_k \\ \phi_1' & \dots & \phi_k' \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(k-1)} & \dots & \phi_k^{(k-1)} \end{vmatrix}$ a $W_i(x)$ je $W_{\phi_1 \dots \phi_k}(x)$ s i-tým sloupcem $\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$

zkusme si to pro $k=2$ (viz Bluman, Anco 143-145)

- řešme $y_2 + p_1(x) y_1 + p_2(x) y = g(x)$ pomocí symetrie vůči $X_1 = \phi_1 \frac{\partial}{\partial y}$, $X_2 = \phi_2 \frac{\partial}{\partial y}$

invarianty pro X_1 jsou $u = x$, $v_1 = \frac{y_1}{\phi_1'} - \frac{y}{\phi_1} \leftarrow \frac{dy}{\phi_1} = \frac{dy_1}{\phi_1'}$

$$v_2 = \frac{dv_1}{du} = \frac{y_2}{\phi_1'} - y_1 \left(\frac{\phi_1''}{(\phi_1')^2} - \frac{1}{\phi_1} \right) + y \frac{\phi_1'}{\phi_1^2}$$

$$\Rightarrow \quad H(u, v_1, v_2) = \phi_1'(u) v_2 + \left(\phi_1''(u) + \frac{\phi_1'(u)^2}{\phi_1(u)} + p_1(u) \phi_1'(u) \right) v_1 = g(u)$$

inf. oper. $X_2^{(1)} = \alpha(u) \frac{\partial}{\partial u} + \beta(u, v_1) \frac{\partial}{\partial v_1}$ kde $\alpha(u) = X_2 u = \phi_2 \frac{\partial}{\partial y} x = 0$

$$\beta(u, v_1) = X_2^{(1)} v_1 = \frac{\phi_2'}{\phi_1'} - \frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{W_{\phi_1 \phi_2}(x)}{\phi_1' \phi_1}$$

- rce $H(u, v_1, v_2) = g(u)$ je inv. vůči $X_2^{(1)} = \frac{W_{\phi_1 \phi_2}(u)}{\phi_1'(u) \phi_1(u)} \frac{\partial}{\partial v_1}$

$\Rightarrow$ integrace pomocí kanon. prom. $R = u$, $S = \frac{\phi_1' \phi_1}{W_{\phi_1 \phi_2}} v_1$

z nichž $\frac{dS}{dR} = \frac{g(R) \phi_1(R)}{W_{\phi_1 \phi_2}(R)}$ (což uskutku vyjde dosazením do $H = g$ za v_2!)

$\Rightarrow \quad S = \frac{y_1 \phi_1(x) - y \phi_1'(x)}{W} = \int \frac{g \phi_1}{W} dx + C_2$ což je inv. vůči $X_1 = \phi_1 \frac{\partial}{\partial y}$ (neboť S je fcí invariantů u, v_1)

integrujme pomocí kanon. proměnných $r = x$, $s = \frac{y}{\phi_1}$ $\Longrightarrow$ $\frac{ds}{dr} = \frac{W}{\phi_1^2} \left[\int \frac{g \phi_1}{W} dx + C_2 \right] = \frac{W}{\phi_1^2} S = \underbrace{\left(\frac{\phi_2}{\phi_1} \right)' \int \frac{g \phi_1}{W} dx}_{\frac{d}{dx} \left[\frac{\phi_2}{\phi_1} \int \dots dx - \frac{g \phi_2}{W} \right]} + C_2 \left(\frac{\phi_2}{\phi_1} \right)'$

a tedy $\frac{y}{\phi_1} = s = C_2 \left(\frac{\phi_2}{\phi_1} \right) + \frac{\phi_2}{\phi_1} \int \frac{g \phi_1}{W} dx - \int \frac{g \phi_2}{W} dx + C_1$

a vynásobením ϕ_1 dostaneme to, co máme

Př. LHO pomocí dif. invariantů s tím, že za X_1 vezmeme $\frac{\partial}{\partial x}$

$$y_2 + \omega^2 y = 0 \qquad (*)$$

invarianty translace jsou $u = y$, $v_1 = y_1$, ...

my však chceme diferenciální inv., tj.

$$v_2 = \frac{dv_1}{du} = \frac{D_x v_1}{D_x u} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = v_2 y_1 = v_2 v_1$$

a tedy $(*)$ je ekvivalentní rci

$$\frac{dv_1}{du} v_1 + \omega^2 u = 0 \qquad (**)$$

která je invariantní vůči škálování $X_2^{(u,v)} = u\frac{\partial}{\partial u} + v_1 \frac{\partial}{\partial v_1}$

neboť $X_2^{(2)} = y\frac{\partial}{\partial y} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} = \alpha(u)\frac{\partial}{\partial u} + \beta(u,v_1)\frac{\partial}{\partial v_1} + \gamma(u,v_1,v_2)\frac{\partial}{\partial v_2}$

kde $\alpha(u) = X_2^{(2)} u(x,y) = y = u$

$\beta(u,v_1) = X_2^{(2)} v_1 = y_1 = v_1$

$\gamma(u,v_1,v_2) = X_2^{(2)} v_2 = \frac{y_2}{y_1} - \frac{y_1 y_2}{y_1^2} = 0$

a tedy pokud $X_2^{(2)}(*)\big|_{y_2 = -\omega^2 y} = 0$, pak také $X_2^{(u,v_1)}\left(\frac{dv_1}{du} v_1 + \omega^2 u\right)\Big|_{(**)} = 0$

a můžeme integrovat např. pomocí kanon. prom.

Ovšem vidíme přímo, že

$$v_1 dv_1 = -\omega^2 u\, du \Rightarrow v_1^2 = -\omega^2 u^2 + c^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = v_1 = \sqrt{c^2 - \omega^2 y^2} \Rightarrow x + x_0 = \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{\omega}{c} y \quad \Leftarrow \int \frac{\frac{\omega}{c}dy}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{c^2}y^2}} = \arcsin\frac{\omega}{c}y$$

neboli opět

$$y = \overset{A}{\frac{c}{\omega}} \sin \omega(x + x_0)$$

Využití bodových symetrií při řešení PDR

- není obecná metoda, jak řešit PDR
$$R^\sigma(x, u, \partial u, \dots \partial^k u) = 0 \quad , \sigma = 1, \dots, N$$
  - řešení ODR závisí na k konstantách (v principu k integrací)
  - řešení PDR obecné závisí na lib. funkcích (okrajové podmínky podél křivek, na nadplochách)
    $\Rightarrow$ typicky nekonečně mnoho řešení
- symetrie umožňují hledat partikulární řešení
- 3 základní metody

1) konstrukce nového řešení z jiného přímo pomocí konečné bodové transformace

Př.: rovnice vedení tepla $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$

řešení $u(x,t) = A$ je pomocí bod. symetrie generované
$$X = 2t \frac{\partial}{\partial x} - ux \frac{\partial}{\partial u} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \tilde{x} = x + 2\varepsilon t \\ \tilde{t} = t \end{array} \quad \tilde{u} = u e^{-\varepsilon x - \varepsilon^2 t}$$
převedeno na netriviální řešení
$$u(x,t) = A e^{-\varepsilon x + \varepsilon^2 t} \quad \text{pro lib. } \varepsilon$$
[Pomocí $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) = G^M(F(\tilde{x}, \tilde{u}, \varepsilon^1), \Theta(F(\tilde{x}, \tilde{u}, \varepsilon^1)), \varepsilon)$, viz dříve]

2) pro lineární PDR lze využít ke konstrukci nových řešení přímo infinitezimální operátory

- mějme lineární PDR $\quad H^\sigma u = G^\sigma(x) \quad , \sigma = 1, \dots, N \qquad (*)$

kde H^σ je lineární diferenciální operátor
$$H^\sigma(x)\, u = \sum_{\alpha=1}^m b^\sigma_\alpha(x)\, u^\alpha + \sum_{\alpha, j} b^\sigma_{\alpha j}(x) \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j} + \sum_{\alpha, j, k} b^\sigma_{\alpha jk}(x) \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j \partial x^k} + \dots$$

[Př. rovnice vedení tepla $u_{xx} = u_t$, zde bychom měli $G^1 = 0$, $H^1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}$, neboli $b^1_1 = 0$, $b^1_{1t} = -1$, $b^1_{1x} = 0$, $b^1_{1xx} = 1$ atd.]

- systém $(*)$ je vždy invariantní vůči bodovým symetriím generovaným $X_\infty = \sum_{\alpha=1}^m \eta^\alpha(x) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$

kde $\eta^\alpha(x)$ je řešením homogenní rovnice $H^\sigma \eta(x) = 0$

nebot' $(\xi=0)$ $X^{(k)} = X + \sum_{\alpha,j} (D_j \eta^\alpha) \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + \sum_{\alpha, j_1, j_2} (D_{j_1} D_{j_2} \eta^\alpha) \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{j_1 j_2}} + \dots$

a tedy $X^{(k)} (H^\sigma u - G^\sigma) \Big|_{H^\sigma u = g^\sigma} = \sum_\alpha b^\sigma_\alpha(x) \eta^\alpha(x) + \sum_{\alpha,j} b^\sigma_{\alpha j}(x) \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^j} + \dots - \underbrace{X^{(k)} G^\sigma(x)}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ \text{nebot } \xi=0}}$

$= H^\sigma(x)\eta(x) = 0$ (dle předpokladu o η)

- pokud kromě X_∞ má rovnice (*) ještě r jiných nezávislých bodových symetrií generovaných $X_1, \dots, X_r$, pak pro libovolné dva inf. oper.

$$X = \sum_{j=1}^r a_j X_j + \sum_\alpha f^\alpha(x) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad \text{a} \quad Y = \sum_{j=1}^r b_j X_j + \sum_\alpha g^\alpha(x) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

bude též $Z = [X, Y] = \sum_{j=1}^r c_j X_j + \sum_\alpha h^\alpha(x) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$

infinitezimálním operátorem a $h^\alpha(x)$ musí být též řešením $H^\sigma h = 0$, a tedy i $H^\sigma(u+h) = G^\sigma$ bude řešením (*)

(Pro homogenní rovnice takto generujeme přímo řešení.)

Př. uvažujme rovnici vedení tepla $u_{xx} = u_t$

a jako $X = X_5 = 2t \frac{\partial}{\partial x} - xu \frac{\partial}{\partial u}$ a $Y = g(x,t) \frac{\partial}{\partial u}$, kde $g(x,t)$ je libovolné řešení $u_{xx} = u_t$

pak $Z = [X, Y] = \left(2t \frac{\partial g}{\partial x} + xg\right) \frac{\partial}{\partial u} = h(x,t) \frac{\partial}{\partial u}$

a z lib. řešení g takto generujeme nekonečnou posl. nových řešení

např. z $g(x,t) = A = \text{konst}$ postupně dostáváme

$h_1 = Ax \Rightarrow h_2 = A(2t + x^2) \Rightarrow h_3 = A(6tx + x^3)$ atd.

Pozn.: tato metoda úzce souvisí se zvedacími a snižovacími operátory v QM pro Schrödingerovu rovnici s fixní energií E, kde jako X volíme $J_1 \pm i J_2$, kde J_1 a J_2 jsou oper. momentu hybnosti

a jako $Y = \psi_{nem} \frac{\partial}{\partial \psi}$ s konkrétní volbou ψ_{nem}

pak nutně $Z = [X, Y] = [(J_1 \pm i J_2)\psi_{nem}] \frac{\partial}{\partial \psi}$

dává též řešení při stejné energii E, ovšem ne vždy nenulové!

(nulové řešení $\psi = 0$ je též řešením)

3) invariantní řešení PDR

- pro jednoduchost uvažujme skalární PDR k-tého řádu

$$R(x, u, \partial u, \dots \partial^k u) = 0 \qquad (1)$$

(obecnější případ je obdobný níže uvedenému postupu, viz Bluman)

a nechť je tato rovnice invariantní při bodové transformaci generované

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u}$$

tj. platí inf. kritérium $\quad X^{(k)} R \big|_{R=0} = 0$

- řešení $u = f(x)$ rovnice (1) nazveme <u>invariantní</u> vůči transf. generované X, pokud $u - f(x) = 0$ je invariantní nadplocha v prostoru (x, u) při této transformaci, tj. platí inf. kritérium inv. této nadplochy

$$X\,(u - f(x))\big|_{u=f} = 0$$

neboli

$$\sum_{i=1}^{n} \xi^i(x, f(x)) \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} = \eta(x, f(x)) \, . \qquad (2)$$

- nejjednodušší případ nastává, pokud rovnice (1) nezávisí explicitně na jedné z nezávislých proměnných, řekněme x^n. Pak je (1) inv. vůči translaci v této proměnné, tj. $X = \frac{\partial}{\partial x^n}$ a podmínka (2) se redukuje na $\frac{\partial f}{\partial x^n} = 0$ a hledáme řešení nezávislé na x^n položením všech derivací podle x^n rovny nule.

Př. rce vedení tepla $\quad u_{xx} = u_t$

nezávisí explicitně na x a na t $\Rightarrow \exists$ řešení $u = f_1(x)$ a $u = f_2(t)$

pro f_1 dostaneme $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow f_1(x) = Ax + B$ ← inv. vůči translaci v čase

pro f_2 dostaneme $\frac{\partial f_2}{\partial t} = 0 \Rightarrow f_2(t) = A$ ← inv. vůči translaci v prostoru

- pokud $\xi^i = 0$ pro všechna i, pak je invariantní řešení dáno implicitně rovnicí $\eta(x, f(x)) = 0$

  např. je-li $X = u\frac{\partial}{\partial u}$ generátorem symetrie (škálování v u)

  pak $u = 0$ je řešením rovnice

- v obecném případě (2) bude alespoň jedno $\xi^i \neq 0$

  a přechodem ke „kanonickým" proměnným $(y^1, \dots, y^n, v)$

  splňujícím

$$\left.\begin{aligned} X y^i &= 0 \quad \text{pro } i = 1, \dots, n-1 \\ X y^n &= 1 \\ X v &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X^{(y,v)} = \frac{\partial}{\partial y^n}$$

  (oproti dříve ~~nez~~ závislá proměnná v splňuje $Xv = 0$ a jedna z nezávislých proměnných $Xy^n = 1$, u (r, s) tomu bylo naopak, ale i tak jde o kanonické proměnné vůči X)

  dostaneme novou PDR nezávislou explicitně na y^n a hledáme tedy řešení $v = H(y^1, \dots, y^{n-1})$.

  Řešení (1) je pak implicitně dáno pomocí

$$v(x, u) = H(y^1(x, u), \dots, y^{n-1}(x, u)) \tag{3}$$

- pokud $y^1, \dots, y^{n-1}$ nezávisí na u, pak lze u z (3) vyjádřit přímo a dosazením do (1) dostaneme rovnici pro H, aniž bychom prováděli změnu souřadnic v (1)

  $\Rightarrow$ <u>metoda invariantní formy</u> (invariant form method dle Blumana)

Př. aplikujme tuto metodu na nalezení netriviálního řešení rovnice vedení tepla $u_{xx} = u_t$

použijeme $X = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}$

a tedy inv. řešení musí splňovat

$$X(u - f(x,t))\Big|_{u=f} = -2t\frac{\partial f}{\partial x} - xf = 0$$

metodou charakteristik nalezneme kanonické proměnné y^1 a v

(y^2 nepotřebujeme)

protože X nezávisí na $\frac{\partial}{\partial t}$, bude $y^1 = t$

v je pak „konstantou" po integraci rce charakt. $\frac{dx}{2t} = \frac{du}{-xu}$

kde t figuruje jako parametr $\Rightarrow$ $-x\,dx = 2t\frac{du}{u}$

a tedy $-\frac{x^2}{2} = 2t\ln u + C$ $\Rightarrow$ $v(x,t,u) = \underset{\uparrow}{-2C} = x^2 + 4t\ln u$

naše volba

invariantní řešení je tedy dáno implicitně pomocí

$$x^2 + 4t\ln u = v(x,t,u) = H(y^1(x,t,u)) = H(t)$$

z čehož
$$u = e^{\frac{H(t)-x^2}{4t}}$$

a dosazením do $u_{xx} = u_t$ máme rovnici pro $H(t)$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{H}{t} - 2 \qquad (4)$$

z pedagogických důvodů vyřešíme tuto rovnici pomocí symetrie, je totiž invariantní vůči škálování

$$X^H = t\frac{\partial}{\partial t} + H\frac{\partial}{\partial H}$$

kanon. souřadnice této transf. jsou $r = \frac{H}{t}$, $s = \ln t$

odkud $\frac{ds}{dr} = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $s = -\frac{r}{2} + \underset{\uparrow}{K}$ $\Rightarrow$ $\ln t = -\frac{1}{2}\frac{H}{t} + \underset{\uparrow}{\ln A^2}$

konstanta ... vhodná volba

Nakonec dostaneme $H(t) = -2t\ln\frac{t}{A^2}$

a tedy
$$u = e^{\frac{H(t)-x^2}{4t}} = \frac{A}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Pozn.: pokud bychom našli i y^2 pomocí $Xy^2 = 1$, např. $y^2 = \frac{x}{2t}$

a převedli $u_{xx} = u_t$ do souřadnic (y^1, y^2, v), dostali bychom

$$v_{y^2y^2} + \frac{1}{4y^1}v_{y^2}^2 - 4y^1\underbrace{\left(y^1 v_{y^1} + v - 2y^1\right)} = 0$$

což je vskutku rovnice explicitně nezávislá na y^2

a položením $v = H(y^1)$ dostaneme opět $t\frac{\partial H(t)}{\partial t} + H(t) - 2t = 0$.

- možná vás napadlo, že bychom také mohli přímo dosadit do $u_{xx}=u_t$ z podmínky $-2t\frac{\partial f}{\partial x}-xf=0$

toto je druhá možnost a jde o tzv. <u>metodu přímé substituce</u>

kdy obecně vyjádříme z $\sum_{i=1}^{n}\xi^i\frac{\partial u}{\partial x^i}=\eta(x,u)$

např. (BÚNO předpokládáme, že $\xi^n\neq 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial x^n}=\frac{\eta}{\xi^n}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\xi^i}{\xi^n}\frac{\partial u}{\partial x^i} \qquad (5)$$

a proderivujeme, abychom v (1) nahradili všechny derivace podle x^n výrazy závisejícími na $x^1,\dots x^{n-1}$ a u a derivacemi nezávislými na x^n. Dostaneme tak PDR, kde x^n bude hrát roli parametru. Řešení této (jednodušší) PDR budou inv. řešeními (1), pokud ještě dosadíme opět do (5) a ověříme, že je toto splněno.

- pokud $n=2$, pak z PDR dostaneme ODR, jejíž řešení závisí na „konstantách", které jsou ovšem funkcemi x^n a dosazením do (5) nalezneme i jejich obecný tvar.

Př. ukažme, že pro $u_{xx}=u_t$ a $X=2t\frac{\partial}{\partial x}-xu\frac{\partial}{\partial u}$ dostaneme stejný výsledek jako metodou invariantní formy

nyní (5) bude mít tvar $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\eta}{\xi^x}=-\frac{xu}{2t}$

z čehož $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{u}{2t}-\frac{x}{2t}\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{u}{2t}+\left(\frac{x}{2t}\right)^2u$

a dosazením do $u_{xx}=u_t$ dostaneme opět vhodně zvolená konstanta

$$\frac{\partial u}{\partial t}=u\left(\frac{x^2}{4t^2}-\frac{1}{2t}\right) \Rightarrow \ln u=-\frac{x^2}{4t}-\frac{1}{2}\ln t+\ln G(x)$$

neboli $u(x,t)=\frac{G(x)}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ a dosazením do $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xu}{2t}$

získáme rovnici pro $G(x)$ $\quad e^{-\frac{x^2}{4t}}\left[\frac{G'(x)}{\sqrt{t}}-\cancel{\frac{x}{2t}\frac{G(x)}{\sqrt{t}}}\right]=\cancel{-\frac{x}{2t}\frac{G(x)}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}}$

neboli $G'(x)=0 \Rightarrow G(x)=A$ a tedy $u(x,t)=\frac{A}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$

což jsme chtěli ukázat.

Variační symetrie

Variační počet - shrnutí

- mějme jako obvykle prostor (x, u) nezávislých $x = (x^1, \dots, x^n)$
  a závislých $u = (u^1, \dots, u^m)$ proměnných

- nechť $\Omega \subset X$ (pouze nezávislé proměnné) je otevřená souvislá podmnožina
  s hladkou hranicí $\partial\Omega$

  pak variačním problémem rozumíme nalezení extrému funkcionálu

$$\mathscr{L}[u] = \int_\Omega L(x, u, \partial u, \dots \partial^\ell u)\, d^n x$$

  na jisté třídě (závisející na přítomných derivacích a okraj. podmínkách)
  funkcí $u = f(x)$ definovaných na Ω.

  Pozn. $[u]$ značí závislost na u a derivacích $\partial u \dots$
  $L(x, u, \partial u, \dots \partial^\ell u) = L(x, u^{(\ell)})$ je langrangián, což je hladká fce $x, u, \partial u \dots$

- variační derivace (variace) funkcionálu $\mathscr{L}[u]$ je jednoznačně určená

  m-tice $\qquad \delta\mathscr{L}[u] = (\delta_1\mathscr{L}, \delta_2\mathscr{L}, \dots \delta_m\mathscr{L})$

  určená vztahem $\quad \left.\dfrac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathscr{L}[f + \varepsilon\eta] = \int_\Omega \delta\mathscr{L}[f(x)] \cdot \eta(x)\, d^n x$

  kde $f(x)$ je hladká fce na Ω a $\eta(x) = (\eta^1(x), \dots \eta^m(x))$ je hladká
  s kompaktním nosičem na Ω

  (a tedy $f(x)$ a $f(x) + \varepsilon\eta(x)$ má stejné okraj. podmínky)

  a $\delta_\alpha\mathscr{L}[u]$ je variační derivace vzhledem k u^α, kterou lze
  určit pomocí Eulerova operátoru

$$\delta_\alpha\mathscr{L} = E_\alpha(L) = \sum_J (-D)_J \frac{\partial L(x, u, \dots)}{\partial u^\alpha_J}$$

  kde $\quad (-D)_J = (-1)^k D_J = (-D_{j_1})(-D_{j_2}) \dots (-D_{j_k})$
  pro multiindex $\quad J = (j_1, \dots j_k) \quad$ a úplnou (totální) derivaci

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_\alpha u^\alpha_j \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \dots \sum_{\alpha, i_1, \dots i_p} u^\alpha_{i_1 \dots i_p j} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1 \dots i_p}} + \dots$$

- pokud je $u = f(x)$ extrém $\mathscr{L}[u]$, pak $\delta\mathscr{L}[f] = 0$, tj. $\delta_\alpha\mathscr{L} = 0$ pro $\forall\alpha$
  a je-li $f(x)$ dostatečně hladká, pak musí být řešením
  Eulerových-Lagrangeových rovnic $\qquad E_\alpha(L) = 0 \quad$ pro $\alpha = 1, \dots, m$

Př. Dirichletův princip $\Rightarrow$ Laplaceova rovnice

$$\mathcal{L}[u] = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u|^2 d^n x = \int_\Omega \frac{1}{2} \sum u_i^2 d^n x \quad , \quad u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i} \quad , \quad \Omega \subset X = \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \quad \delta \mathcal{L}[u] = 0 = \underbrace{E(L)_1}_{\text{jiné derivace nepřispívají}} = \sum_{i=1}^{n} (-D_i) \frac{\partial L}{\partial u_i} = -\sum_{i=1}^{n} D_i (u_i) = -\Delta u$$

- nulové a ekvivalentní lagrangiány (tj. nejen pro řešení variační úlohy, ale pro lib. u)
  - pokud jsou E-L rce identicky nulové, mluvíme o nulovém lagrangiánu

    Př. $\mathcal{L}[u] = \int_a^b u u_x \, dx \Rightarrow \delta \mathcal{L} = u_x - D_x(u) = 0$

    (neboť $\mathcal{L}[u] = \int_a^b D_x\left(\frac{u^2}{2}\right) dx = \left.\frac{u^2}{2}\right|_{x=a}^{b}$ a tedy lib. fce $u = f(x)$ se správnými okr. podm. dává stejné $\mathcal{L}[u]$)
  - obecně pokud $L = \mathrm{Div}\, P$ pro jisté $P = (P_1, \dots P_n)$, kde $\mathrm{Div}\, P = D_1 P_1 + \dots + D_n P_n$ je úplná divergence

    pak $E(L) = 0$ a $L(x, u^{(k)})$ je tedy nulový lagrangián

    $$\left(\mathcal{L}[u] = \int_\Omega L \, d^n x = \int_\Omega \mathrm{Div}\, P \, d^n x = \int_{\partial\Omega} P \cdot dS \text{ , což závisí pouze na } \partial\Omega \right)$$

    [Platí i obrácené (viz Olver):
    Pokud $E(L) = 0$ pro ~~skalár~~ $L(x, u, \dots)$ a lib. u,
    pak musí být $L = \mathrm{Div}\, F(x, u)$]

- variační symetrie
  - lokální grupa bodových transformací G na prostoru $M \subset \Omega_0 \times U$ je grupou variační symetrie funkcionálu $\mathcal{L}[u] = \int_{\Omega_0} L(x, u^{(k)}) \, d^n x$

    pokud pro lib. $\Omega \subset \Omega_0$, $u = f(x)$ hladkou na Ω a její obraz $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ při bod. transf. $\tilde{x} = F(x, u; \varepsilon)$, $\tilde{u} = G(x, u; \varepsilon)$ definovaný na $\tilde{\Omega} \subset \Omega_0$

    platí $\int_{\tilde{\Omega}} L(\tilde{x}, \tilde{f}(\tilde{x}), \dots \tilde{f}^{(k)}(\tilde{x})) d^n \tilde{x} = \int_\Omega L(x, f(x), \dots) \, d^n x$

- infinitezimální kritérium variační symetrie
  - uvažujme transf. $\tilde{x}^i = F^i(x, u; \varepsilon)$, $\tilde{u}^\alpha = G^\alpha(x, u, \varepsilon)$ jako ~~změnu~~ souřadnic u vícerozměrného integrálu

    $$\int_{\tilde{\Omega}} L(\tilde{x}, \tilde{u}, \dots) d^n \tilde{x} = \int_\Omega L(\tilde{x}(x, u(x), \varepsilon), \tilde{u}(x, u, \varepsilon) \dots) \det J_\varepsilon(x, u(x) \dots) \, d^n x = \int_\Omega L(x, u \dots) d^n x$$

    což má platit pro lib. $\Omega \subset \Omega_0$ a $u = f(x)$ a tedy musí platit pro infin. transf. pro $J_\varepsilon{}^j_i = D_i F^j(x, u, \varepsilon)$

    $$L(x + \varepsilon \xi + \mathcal{O}(\varepsilon^2), u + \varepsilon \eta + \mathcal{O}(\varepsilon^2), u^{(1)} + \varepsilon \eta^{(1)} \dots) \begin{vmatrix} \frac{d(x^1 + \varepsilon \xi^1(x, u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2))}{dx^1} & \frac{d(x^1 + \varepsilon \xi^1 + \dots)}{dx^2} & \dots \\ & \ddots & \\ & & \frac{d(x^n + \varepsilon \xi^n)}{dx^n} \end{vmatrix}$$

    $1 + \varepsilon D_n \xi^n + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ a pod.

    $$\frac{dL}{d\varepsilon} = \xi^i \frac{\partial L}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} + \dots = X^{(k)} L$$

    $$= \left(L(x, u^{(k)}) + \varepsilon X^{(k)} L + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) \left(1 + \varepsilon \, \mathrm{Div}\, \xi + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) = L(x, u^{(k)})$$

    neboli $\boxed{X^{(k)} L + L \, \mathrm{Div}\, \xi = 0}$ (pro libovolné u)

    Lze ukázat, že generuje-li X variační symetrii, pak jde též o symetrii E-L rovnic, ovšem ne naopak! (např. škálování u)

Zákony zachování

- k čemu jsou
  - říkají, které veličiny se během pohybu, vývoje systému, nemění
  - též užitečné při vyšetřování integrability a linearizace
  - při vývoji stabilních numerických metod
  - platí pro libovolná počáteční data
  - jsou nezávislé na souřadnicích, neboť transformace souřadnic převádí ZZ na ZZ

- **lokální zákon zachování**
  - uvažujme systém $R^\sigma[u] = R^\sigma(x, u, \partial u \dots \partial^k u) = 0$, $\sigma = 1, \dots, N$

    N PD rovnic pro m závislých proměnných $u = (u^1(x), \dots u^m(x))$ jakožto fcí nezávislých proměnných $x = (x^1, \dots x^n)$

  pak úplnou divergenci $\mathrm{Div}\,\Phi = D_i \Phi^i[u] = D_1 \Phi^1[u] + \dots + D_n \Phi^n[u] = 0$

  splněnou pro řešení $R^\sigma = 0$, nazveme LZZ, kde

  $$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ji}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + \dots$$ je úplná derivace

  a $\Phi^i[u] = \Phi^i(x, u, \partial u, \dots \partial^r u)$, $i = 1, \dots, n$ se nazývají toky (a hustoty) ZZ

  a nejvyšší derivace r je pak řád ZZ.

  - pokud $x^n = t$ je čas, pak obvykle píšeme

    $$\underbrace{D_t \varrho[u]}_{\text{hustota}} + \operatorname{div} \underbrace{\Phi[u]}_{\text{prostorové toky}} = 0, \quad \text{kde} \quad \operatorname{div} \Phi[u] = D_1 \Phi^1[u] + \dots + D_{n-1} \Phi^{n-1}[u]$$ je prostorová divergence

    $$\Rightarrow \underbrace{D_t \left(\int_\Omega \varrho[u]\, d^{n-1}x \right)}_{\text{zachovávající se „něco"}} = - \int_\Omega (\operatorname{div} \phi[u])\, d^{n-1}x = \oint_{\partial\Omega} (\phi[u] \cdot \vec{n})\, d^{n-2}x = 0$$

    pokud $\phi^i[u]$ vymizí na $\partial\Omega$

Př. plyn v $\mathbb{R}^3$, v = rychlost, p = tlak, ϱ = hustota

Eulerovy rovnice pro adiabatické procesy v plynu

$$D_t \varrho + D_j (\varrho v^j) = 0 \quad (*) \ (\text{ZZ hmoty})$$

$$\varrho (D_t + v^j D_j) v^i + D_i p = 0 \quad (**)$$

$$\varrho (D_t + v^j D_j) p + \gamma \varrho p D_j v^j = 0 \quad (***)$$ γ je adiabatický exponent

další ZZ: hybnost $v^i (*) + (**) = D_t (\varrho v^i) + D_j (\varrho v^i v^j + p \delta^{ij}) = 0$, $i = 1, 2, 3$

energie $\sum_{i=1}^{3} \left[\frac{(v^i)^2}{2} (*) + \varrho v^i (**) + \frac{1}{\varrho(\gamma - 1)} (***) \right] =$

$$= D_t (E) + D_j [\underbrace{v^j (E + p)}_{\text{tok energie}}] = 0$$ kde $\underbrace{E = \frac{1}{2} \varrho v^2 + \frac{p}{\gamma - 1}}_{\text{hustota energie}}$

$$\Rightarrow D_t \int_\Omega E\, d^3x = - \oint_{\partial\Omega} (E + p)(\vec{v} \cdot \vec{n})\, dS$$

Př. Kortewegova – de Vriesova rovnice (~~malé~~ dlouhé povrchové vlny na mělké vodě)

(*) $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$

$\hookrightarrow D_t(u) + D_x\left(\frac{1}{2}u^2 + u_{xx}\right) = 0$ $\quad 1\cdot(*)$

ZZ „hmoty"

hybnosti $\quad D_t\left(\frac{1}{2}u^2\right) + D_x\left(\frac{1}{3}u^3 + uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2\right) = 0$ $\quad u\cdot(*)$

energie $\quad D_t\left(\frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{2}u_x^2\right) + D_x\left(\frac{1}{8}u^4 - uu_x^2 + \frac{1}{2}(u^2u_{xx} + u_{xx}^2) - u_x u_{xxx}\right) = 0$

ale ∞ mnoho dalších, vyšší polynomy v u a u_x

- <u>ekvivalentní ZZ</u>

<u>Def:</u> LZZ pro určitý systém PDR $R^\sigma[u]=0$ nazveme <u>triviální</u>,

pokud $\quad \Phi^i[u] = M^i[u] + H^i[u]$

kde $M^i[u] = 0$ pro $\forall u = f(x)$ řešení $R^\sigma[u]=0$ $\quad$ (prvního druhu)

a $H^i[u]$ splňuje $D_i H^i[u] \equiv 0$ pro $\forall u$ $\quad$ (druhého druhu)

<u>Př.</u> $\quad v_x = u \; , \; v_t = K(u)\,u_x$

pak $\quad D_t\left[u(v - v_x)\right] + D_x\left[z(v_t - K(u)\,u_x)\right] = 0$ $\quad$ prvního druhu

$D_t(u_{xx}) - D_x(u_{tx}) = 0$ $\quad$ druhého druhu

Př. $\quad \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{f}) = 0$ pro lib. fci $\vec{f}(x)$ v $\mathbb{R}^3$ $\quad$ - triviální ZZ druhého druhu

<u>Def:</u> Dvě ZZ $D_i\Phi^i[u]=0$ a $D_i\Psi^i[u]=0$ jsou <u>ekvivalentní</u>,

pokud $D_i\left(\Phi^i[u] - \Psi^i[u]\right) = 0$ je triviální ZZ.

Třída ekvivalence ZZ je tvořena všemi ZZ ekvivalentními určitému netriviálnímu ZZ.

<u>Def:</u> ZZ $\{D_i\Phi^i_{(j)}[u]=0\}_{j=1}^{\ell}$ jsou <u>lineárně závislé</u>, pokud $\exists\, \{a^{(j)}\}_{j=1}^{\ell}$ nenulové

takové, že $\quad D_i\left(a^{(j)}\Phi^i_{(j)}[u]\right) = 0$ je triviální ZZ.

- hledáme netriviální, lineárně nezávislé ZZ $\quad$ - přímá konstrukce Bluman et al. (2010)

- <u>charakteristický tvar ZZ</u> a charakteristika (multiplikátory, integrační faktor)

– lze ukázat, že má-li být $\operatorname{Div}\Phi = 0$ pro řešení $u=f(x)$ PDR $R^\sigma[u]=0$, pak

$$\operatorname{Div}\Phi = \sum Q^J_\mu D_J R^\mu \quad \overset{\text{„per partes"}}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\operatorname{Div}\Phi = \operatorname{Div}\Psi + \sum_{\mu=1}^{N} Q_\mu R^\mu}$$

multiindex

$D_J R^\mu = 0$ pro $R^\mu = 0$ $\quad$ kde $Q_\mu = \sum_J (-D)_J\, Q^J_\mu$

kde Ψ dává triviální ZZ (prvního druhu)

Zákony zachování - pokračování

a tedy ZZ $\mathrm{Div}\,\Phi$ má ekvivalentní ZZ $\mathrm{Div}\,\Phi' = 0 = \mathrm{Div}(\phi - \psi) = Q_\nu R^\nu$ charakteristický tvar

a $\vec{Q} = (Q_1 \dots Q_N)$ je tzv. charakteristika ZZ

(též multiplikátory, pro ODR integr. faktory)

- ovšem Q není určena jednoznačně (kromě $N=1$), avšak je-li pro Q a Q'

$$Q \cdot R = Q' R$$

, pak lze ukázat, pokud je R nedegenerované (max. hodnosti), pak $Q - Q' = 0$ pro $u = f(x)$ řešení $R^\nu = 0$

$\Rightarrow$ 2 charakteristiky Q a Q' jsou ekvivalentní, pokud se liší triviální charakteristika

tj. $Q - Q' = \tilde{Q} \equiv 0$ pro $u = f(x)$

- lze ukázat, že pro „rozumné" PDR jsou 2 ZZ ekvivalentní, pokud jsou ekvivalentní jejich charakteristiky

---

Symetrie a jejich charakteristický tvar

- měli jsme obecné bodové symetrie generované

$$X^{(k)} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\substack{J \\ 1 \le \# J \le k}} \eta^\alpha_J (x, u, \partial u \dots) \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J}$$

kde

$$\eta^\alpha_{\underbrace{i_1 \dots i_p}_{J}} = D_{i_p} \eta^\alpha_{i_1 \dots i_{p-1}} - \sum_{j=1}^{n} (D_{i_p} \xi^j) u^\alpha_{i_1 \dots i_{p-1} j}$$

což lze přepsat jako (indukcí, využití $D_{i_1}(\xi^j u^\alpha_j) = (D_{i_1}\xi^j) u^\alpha_j + \xi^j u^\alpha_{i_1 j}$ apod.)

$$\eta^\alpha_J = D_J \underbrace{\left(\eta^\alpha - \sum_{j=1}^{n} \xi^j u^\alpha_j\right)}_{\hat{\eta}^\alpha} + \sum \xi^j u^\alpha_{J,j}$$

Výraz $\hat{\eta}^\alpha$ se nazývá

charakteristika symetrie

Pokud připustíme zobecnění, že η^α mohou záviset na derivacích, pak

~~systém~~ dif. rovnice inv. vůči X jsou též inv. při transf. generovaných

$$\hat{X} = \sum_{\alpha=1}^{m} \hat{\eta}^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

- charakt. tvar inf. gen. X

jehož rozšíření je $\hat{X}^{(k)} = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\substack{J \\ 0 \le \# J \le k}} \hat{\eta}^\alpha_J \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J}$, kde $\hat{\eta}^\alpha_J = D_J \hat{\eta}^\alpha$

Vztah mezi $\hat{X}^{(k)}$ a $X^{(k)}$:

$$X^{(k)} = \sum_j \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{\substack{\alpha, J \\ \# J \ge 0}} \eta^\alpha_J \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J} = \sum_j \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{\alpha, J} \left(D_J \hat{\eta}^\alpha + \sum_j \xi^j u^\alpha_{J,j} \right) \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J} = \hat{X}^{(k)} + \sum_j \xi^j D_j$$

$$= \hat{X}^{(k)} + \sum_j \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{j,\alpha} \xi^j u^\alpha_j \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{j_1, j_2, \alpha} \xi^{j_1} u^\alpha_{j_1 j_2} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{j_2}} + \dots =$$

Věta Noetherové (bodové symetrie)

Nechť jednoparam. grupa bod. transf. generované

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{m} \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

je grupou symetrie variačního problému $\mathcal{L}[u] = \int L[u]\, d^n x$

a tedy i grupou symetrie Eulerových-Lagrangeových rovnic $E_\alpha(L) = 0$

Pak $\hat{\eta}^\alpha = \eta^\alpha - \sum_{i=1}^{n} \xi^i u_i^\alpha$ (charakteristika X) je charakteristikou zákona zachování příslušných E-L rovnic, tj. $\exists\, \Phi[u] = (\Phi^1, \dots \Phi^n)$ takové, že

$$\mathrm{Div}\, \Phi = \hat{\eta} \cdot E(L) = \sum_{\alpha=1}^{m} \hat{\eta}^\alpha \cdot E_\alpha(L) = 0$$

přičemž pro $L = L(x, u, \partial u)$ jsou toky Φ^i dány vztahy

$$\Phi^i = -\sum_{\alpha=1}^{m} \hat{\eta}^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - L\xi^i = \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \xi^j u_j^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{m} \eta^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - L\xi^i$$

<u>Důkaz:</u> Dosazením do inf. kritéria variační symetrie

$$X^{(2)} L + L\, \mathrm{Div}\, \xi = 0$$

za $X^{(2)} = \hat{X}^{(2)} + \sum_{j=1}^{n} \xi^j D_j$

dostaneme $$\hat{X}^{(2)} L + \sum_{j=1}^{n} \left[\xi^j D_j L + L D_j \xi^j \right] = \hat{X}^{(2)} L + \mathrm{Div}(L\xi) \qquad (*)$$

a člen $\hat{X}^{(2)} L$ upravujeme à la per partes

$$\hat{X}^{(2)} L = \sum_{\alpha, J} (D_J \hat{\eta}^\alpha) \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{m} \Bigg\{ \hat{\eta}^\alpha \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \left[D_i \left(\hat{\eta}^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} \right) - \hat{\eta}^\alpha D_i \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} \right] +$$

$$+ \sum_{i_1, i_2} \left[D_{i_2}\left((D_{i_1} \hat{\eta}^\alpha) \frac{\partial L}{\partial u_{i_1 i_2}^\alpha} \right) - D_{i_1}\left(\hat{\eta}^\alpha D_{i_2} \frac{\partial L}{\partial u_{i_1 i_2}^\alpha} \right) + \hat{\eta}^\alpha D_{i_1} D_{i_2} \frac{\partial L}{\partial u_{i_1 i_2}^\alpha} \right] + \dots \Bigg\}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{m} \hat{\eta}^\alpha \sum_J (-D)_J \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha} + \mathrm{Div}\, A = \sum_{\alpha=1}^{m} \hat{\eta}^\alpha \cdot E_\alpha(L) + D_1 A^1 + \dots + D_n A^n$$

kde $$A^i = \sum_{\alpha=1}^{m} \left\{ \hat{\eta}^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} + \sum_{j=1}^{n} \left[(D_j \hat{\eta}^\alpha) \frac{\partial L}{\partial u_{ji}^\alpha} - \hat{\eta}^\alpha D_j \frac{\partial L}{\partial u_{ji}^\alpha} \right] + \dots \right.$$

Dosazením do $(*)$ máme $$0 = \sum_{\alpha=1}^{m} \hat{\eta}^\alpha E_\alpha(L) + \mathrm{Div}\,(A + L\xi)$$

a tedy $\mathrm{Div}\, \Phi = \sum_{\alpha=1}^{m} \hat{\eta}^\alpha E_\alpha(L) \underset{\uparrow \text{ pro řešení E-L rovnic}}{=} 0$

zachovávající se toky jsou $$\Phi^i = -A^i - L\xi^i$$

Příklady na použití věty Noetherové

$$\Phi^i = \sum_\alpha \sum_j \xi^j u_j^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - \sum_\alpha \eta^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - L\xi^i$$

1) Soustava N hmotných inter. bodů bez vnějšího pole

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V(x) = T - V$$

Newton. pohyb. rovnice $m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$ ... jsou invariantní při

translaci v čase $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ $\begin{pmatrix} \xi = 1 \\ \eta = 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow E = \Phi^1 = -L + \sum_{\alpha=1}^{3N} u_t^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_t^\alpha} = -T + V + 2T = T + V$

$\{u^1 = x_1, u^2 = y_1, \dots u^4 = x_2\}$

translace v prostoru všech částic najednou

$$X_2 = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \begin{pmatrix} \xi = 0 \\ \eta^\alpha = 1 \text{ pro } \alpha = 1, 4, \dots \\ \eta^\alpha = 0 \text{ pro } \alpha = 2, 3, 5, 6 \dots \end{pmatrix} \Rightarrow -P_x = \Phi^1 = -\sum_\alpha \eta^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_t^\alpha} = -\sum_i m_i \dot{x}_i$$

a podobně pro y a z

ověříme, že jde o var. symetrii $X_2^{(1)} = X_2$ (jde o translaci)

$$X^{(1)} L + L \cancel{\mathrm{Div}\,\xi}^{\,0} = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0$$

(součet sil, není-li vnější pole, musí být nulový)

2) Uvažujme 1D vlnovou rovnici $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$ plynoucí z Lagrangiánu

$$L = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left[\psi_x^2 - \frac{1}{c^2}\psi_t^2\right]$$

Tato rovnice je invariantní vůči LGT generovanými

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} \qquad = X_1^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x} \qquad X_1^{(1)} L + L\,\mathrm{Div}\,\xi_1 = 0$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial t} \qquad = X_2^{(1)} = \frac{\partial}{\partial t} \qquad X_2^{(1)} L + L\,\mathrm{Div}\,\xi_2 = 0$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial \psi} \qquad = X_3^{(1)} = \frac{\partial}{\partial \psi} \qquad = 0$$

$$X_4 = \psi\frac{\partial}{\partial \psi} \qquad X_4^{(1)} = X_4 + \psi_x \frac{\partial}{\partial \psi_x} + \psi_t \frac{\partial}{\partial \psi_t} \qquad X_4^{(1)} L = 2L \neq 0 \quad \text{není variační}$$

$$X_5 = x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} \qquad X_5^{(1)} = X_5 - \psi_x \frac{\partial}{\partial \psi_x} - \psi_t \frac{\partial}{\partial \psi_t} \qquad X_5^{(1)} L + L\,\mathrm{Div}\,\xi_5 = -2L + 2L = 0$$

odpovídající LZZ jsou obecně dány vztahy

$$\mathrm{Div}\,\Phi = D_x \Phi^x + D_t \Phi^t = 0$$

$$\Phi^x = (\xi^x \psi_x + \xi^t \psi_t - \eta)\frac{\partial L}{\partial \psi_x} - L\xi^x$$

$$\Phi^t = (\xi^x \psi_x + \xi^t \psi_t - \eta)\frac{\partial L}{\partial \psi_t} - L\xi^t$$

Pro X_1 a X_2 dostaneme

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_1^x &= \psi_x \frac{\partial L}{\partial \psi_x} - L\xi_1^x = \frac{1}{2}\left(\psi_x^2 + \frac{1}{c^2}\psi_t^2\right) \\
\Phi_1^t &= \psi_x \frac{\partial L}{\partial \psi_t} = -\frac{1}{c^2}\psi_x \psi_t \\
\Phi_2^x &= \psi_t \frac{\partial L}{\partial \psi_x} = \psi_x \psi_t \\
\Phi_2^t &= \psi_t \frac{\partial L}{\partial \psi_t} - L\xi_2^t = -\frac{1}{2}\left(\psi_x^2 + \frac{1}{c^2}\psi_t^2\right)
\end{aligned}\right\}$$

splňují $\mathrm{Div}\,\Phi = 0$ a lze je psát souhrnně ve tvaru $T_{\mu,\nu}^{\nu} = 0$

kde $T_\mu^\nu = \begin{pmatrix} P_1^x & P_1^t \\ P_2^x & P_2^t \end{pmatrix}$

Pro X_3 dostaneme původní rovnici, neboť

$$\Phi_3^x = -\frac{\partial L}{\partial \psi_x} = -\psi_x, \quad \Phi_3^t = -\frac{\partial L}{\partial \psi_t} = \frac{1}{c^2}\psi_t \Rightarrow -D_x \psi_x + \frac{1}{c^2} D_t \psi_t = 0$$

Konečně pro X_5 bychom dostali

$$\phi_5^x = \frac{1}{2}x\left(\psi_x^2 + \frac{1}{c^2}\psi_t^2\right) + t\psi_t\psi_x$$

$$\phi_5^t = -\frac{x}{c^2}\psi_t\psi_x - \frac{1}{2}t\left(\psi_x^2 + \frac{1}{c^2}\psi_t^2\right)$$

vskutku vyjde

$$D_x\phi_5^x + D_t\phi_5^t = 0$$

Zobecnění teorému E. Noetherové

Noetherovskou symetrií funkcionálu $\mathscr{L}[u]$ je LGT generovaná X, pro který platí $X^{(k)}L + L\,\mathrm{Div}\,\xi = \mathrm{Div}\,B$. Lze ukázat, že pokud X generuje Noeth. symetrii, pak generuje též symetrii přísl. E-L rovnic.

V tomto případě je zachovávající se tok $\Phi = B - A - L\xi$

Příklady

1) N hmotných bodů $L = \sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{x}_i^2 + \dots) - V(x)$, kde V je translačně inv.

inf. gen.

$$X = \sum_{i=1}^{N} t\frac{\partial}{\partial x_i}$$ generuje Gal. transformaci $\tilde{x}_i = x_i + \varepsilon t$

přičemž

$$X^{(1)} = X + \sum_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \Rightarrow X^{(1)}L \overset{\xi=0}{=} \sum_i\left(m_i\dot{x}_i - t\frac{\partial V}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{x}_i = \frac{d}{dt}\sum_i m_i x_i = \mathrm{Div}\,B$$

a tedy přísl. ZZ je

$$\Phi = B - A = \sum m_i x_i - t\sum m_i\dot{x}_i = \text{konst} = \text{poč. poloha těžiště ve směru osy } x$$