Poznámky o funkcionální notaci a diferenciálních operátorech

Funkcionální notace

P prostor historií $\qquad P = \mathcal{F}M \qquad \phi(x) = \phi^x$

P^* duál - prostor hustot $\qquad P^* = \tilde{\mathcal{F}}M \qquad J(x) = J_x$

typicky $J = g^{\frac{1}{2}} j \qquad g^{\frac{1}{2}}$ metr. hustota $\quad j$ fce

dualita

$$\int_x J(x)\,\phi(x) = J_x \phi^x = J \bullet \phi$$

připouštíme distribuce
vhodně zvolená hladkost aby operace měly smysl
vždy vhodné chování na hranici aby šly ignorovat
okrajové členy (zkoumání v mat., okr. podm.)
zajímavé chování na hr. budeme zkoumat explicitně

Delta fce a funkcionální metrika

$\delta(x|y)$ přesněji $\delta^{x \in \text{fce}}_{y \in \text{hustota}}$ bidistribuce

$\phi^x = \delta^x_y \phi^y \qquad \phi(x) = \int_y \delta(x|y)\,\phi(y)$

skalární součin na P

$$(\phi,\psi) = \int_x \phi(x)\,\psi(x)\,g^{\frac{1}{2}}(x) = \int_{x,y} \phi(x)\,\underbrace{(g^{\frac{1}{2}}\delta)(x|y)}_{G(x|y)}\,\phi(y)$$

$$= \phi^x \psi^y G_{xy}$$

$G_{xy} = (g^{\frac{1}{2}}\delta)_{xy}$ metrika na P

Tenzorová pole

obyčejné tenz. indexy nahoře
duál má komplem. str. indexů + hustota
př: $a^\mu \in \mathcal{T}^1_0 M \qquad \alpha_\mu \in \tilde{\mathcal{T}}^0_1 M \qquad a \bullet \alpha = \int_x a^\mu \alpha_\mu$

Gradient

$d_0 : \check{F}M \to \tilde{I}^0_1 M$ duál výsledku $\tilde{I}^1_0 M$ (vektor-hustoty)

$d_0 \in \tilde{I}^0_1 M \otimes \tilde{F}M$

$$\alpha^m \cdot \overset{\rightsquigarrow}{d}_m \cdot \phi = \int \alpha^m d_m \phi$$

$$\overset{\rightsquigarrow}{d}_m{}^x{}_y = \left(\frac{d_m}{\partial x}\delta\right)^x_y \qquad \overset{\rightsquigarrow}{d}_m \cdot \phi = d_m \phi$$

můžeme totiž psát

$$(\overset{\rightsquigarrow}{d}_m \cdot \phi)^x = \int_y \left(\frac{d_m}{\partial x}\delta\right)(x|y)\,\phi(y) = d_m \int_y \delta(x|y)\,\phi(y) = (d_m\phi)(x)$$

Divergence na vektor-hustotách

$d_0 : \tilde{I}^1_0 M \to \check{F}M$ duál výsledku $\check{F}M$

$d_0 : \tilde{F}M \otimes \tilde{I}^0_1 M$

$$\phi \cdot \overset{\rightsquigarrow}{d}_m \cdot \alpha^m = \int \phi\,(d_m \alpha^m)$$

připomeňme

$$d_m \alpha^m = \operatorname{div} \alpha = \alpha^m{}_{,m} = \nabla_m \alpha^m \qquad \text{nezávislé na } \nabla$$

$$(\overset{\rightsquigarrow}{d}_m)_y{}^x = \left(\frac{d_m}{dy}\delta\right)^x_y$$

vskutku

$$(\overset{\rightsquigarrow}{d}_m \cdot \alpha^m)_y = \int_x \left(\frac{d_m}{dy}\delta\right)(x|y)\,\alpha^m(x) = d_m \int \delta(x|y)\,\alpha^m(x) = (d_m\alpha^m)(y)$$

Směr derivace

šipku $\rightsquigarrow$ používáme k naznačení směru der.

máme tedy

gradient $\overset{\rightsquigarrow}{d}_0$ $\overset{\leftarrow}{d}_0$ (př. $\overset{\rightsquigarrow}{d}_0 \cdot \phi = d\phi = \phi \cdot \overset{\leftarrow}{d}$)

divergenci $\vec{d}_0$ $\overset{\leftarrow}{d}_0$ (př. $\overset{\leftarrow}{d}_0 \cdot \alpha^0 = d_0 \alpha^0 = \alpha^0 \cdot \overset{\leftarrow}{d}_0$)

Transpozice

pozor lze porovnávat pouze bidistribuce stejného typu

$\tilde{\vec{d}}_a$ (gradient) $\quad \hat{d}_a$ (gradient) $\quad$ neporovnatelné

$\hat{\vec{d}}_a$ (gradient) $\quad \hat{d}_a$ (divergence) $\quad$ porovnatelné

obrácení šipky je formální transpozice
dává objekt stejn. typu jen pro
bi-lineární ~~formy~~ (obj. sym. typu)

$\mathcal{H} \in P^* \otimes P^*$ (resp. tenz. analog)

$\mathcal{H}_{xy} \qquad \phi \cdot \mathcal{H} \cdot \psi = \phi^x \mathcal{H}_{xy} \phi^y$

$\mathcal{H}^T{}_{xy} = \mathcal{H}_{yx}$ lze porovnávat

Per-partes

per partes = Gaussova věta $\Rightarrow$

$\vec{d}_a + \hat{d}_a = 0$ (grad-div)

ve ~~smyslu~~

$$\alpha^a \cdot \vec{d}_a \cdot \phi + \alpha^a \cdot \hat{d}_a \cdot \phi =$$

$$= \alpha^a \cdot (d_a \phi) + (d_a \alpha^a) \cdot \phi =$$

$$= \int (\alpha^a d_a \phi + \phi \, d_a \alpha^a) = \int d_a (\phi \alpha^a)$$

$$= \int_{\text{okraj}} \phi \alpha^a \, d\Sigma_a = 0$$

↑ nulové okr. podm.

Kovariantní derivace

∇_a - obdobně jako grad a div
- může ale působit na lib. tenz. pole

definujeme

$\overset{\rightsquigarrow}{\nabla}_a \qquad (\overset{\rightsquigarrow}{\nabla}_a)^x{}_y = \frac{\nabla_a}{\partial x}\,\delta(x,y)$

$$\overset{\rightsquigarrow}{\nabla}_a \cdot T^{m\ldots}_{n\ldots} = \nabla_a T^{m\ldots}_{n\ldots}$$

$\overset{\leftsquigarrow}{\nabla}_a \qquad$ formální transpozice

pokud $\overset{\rightsquigarrow}{\nabla}_a$ a $\overset{\leftsquigarrow}{\nabla}_a$ jsou ze stejného prostoru, pak

$$\overset{\rightsquigarrow}{\nabla}_a + \overset{\leftsquigarrow}{\nabla}_a = 0$$

př: σ hustota $\quad a^a$ vektor

$\overset{\rightsquigarrow}{\nabla}_a, \overset{\leftsquigarrow}{\nabla}_a$ hust-vekt

$$\sigma \cdot (\overset{\rightsquigarrow}{\nabla}_a + \overset{\leftsquigarrow}{\nabla}_a) \cdot a^a = \int \left(\sigma (\nabla_a a^a) + (\nabla_a \sigma)\, a^a\right)$$

$$= \int \nabla_a (\sigma a^a) \underset{\text{okr. člen vymizí}}{=} 0$$

Diferenciální operátory

$A : \mathcal{F}M \to \mathcal{F}M \qquad \phi \to A\phi$

distribuční tvar:

$$(A\phi)(x) = \int_y \tfrac{A}{\partial x}\delta(x|y)\,\phi(y) = \int_y \overset{\leadsto}{A}(x|y)\,\phi(y) = (\overset{\leadsto}{A}\cdot\phi)(x)$$

$$\overset{\leadsto}{A}(x|y) = \overset{\leadsto}{A}{}^x{}_y = \left(\tfrac{A}{\partial x}\delta\right)^x{}_y$$

můžeme zavést formální transpozici

$$\overset{\backsim}{A}(x|y) = \overset{\leadsto}{A}(y|x) = \left(\tfrac{A}{\partial y}\delta\right)(x|y)$$

$\overset{\backsim}{A}$ působí na fce doleva a na hustoty doprava

$\overset{\backsim}{A}$ a $\overset{\leadsto}{A}$ žijí v jiném prostoru – nelze porovnávat

Transpozice vzhledem ke sk. součinu

sk. součin $\quad (\phi, \psi) = \phi\cdot g\cdot\psi$

transpozice

$$(A^T\phi, \psi) = (\phi, A\psi)$$

pozor na směr!

$$A^{T\,x}{}_y = g^{xu} A^v{}_u\, g_{vy} \qquad \overset{\leadsto}{A}{}^T = g^{-1}\cdot\overset{\backsim}{A}\cdot g$$

symetrie

$$A^T = A \quad\Leftrightarrow\quad g_{xz} A^z{}_y = A^z{}_x\, g_{zy}$$

asociovaná bilineární forma

$$a_{xy} = g_{xz} A^z{}_y \qquad a\cdot\phi = g\cdot A\cdot\phi$$

Transpozice pro bilineární formy

transpozice $\quad \mathcal{F}\in P^*\otimes P^*$

$$\mathcal{F}^T \qquad \phi\cdot\mathcal{F}^T\cdot\psi = \psi\cdot\mathcal{F}\cdot\phi \qquad \mathcal{F}^T_{xy} = \mathcal{F}_{yx}$$

pro bilin. f. indukované operátorem se shoduje formální transp. s transp. indukované skal. souč.

$$\overset{\leadsto}{a} = g\cdot\overset{\leadsto}{A} \qquad \overset{\backsim}{a} = \overset{\backsim}{A}\cdot g \qquad \overset{\leadsto}{a} = \overset{\backsim}{a}{}^T$$

$$g\cdot\overset{\leadsto}{A}{}^T = g\cdot g^{-1}\cdot\overset{\backsim}{A}\cdot g = \overset{\backsim}{A}\cdot g = \overset{\backsim}{a} = \overset{\leadsto}{a}{}^T$$

$$\overset{\backsim}{A}{}^T\cdot g = g\cdot\overset{\leadsto}{A}\cdot g^{-1}\cdot g = g\cdot\overset{\leadsto}{A} = \overset{\leadsto}{a} = \overset{\backsim}{a}{}^T$$

Operátory 1. řádu

$$\overset{\rightsquigarrow}{\mathcal{D}} = \alpha^a \overset{\rightsquigarrow}{d}_a + \beta\,\delta$$

α^a vektor-konstanta

β konstanta

$$\phi \bullet \overset{\rightsquigarrow}{\mathcal{D}} \bullet \psi = \int \left(\phi\, \alpha^a d_a \psi + \phi \psi \beta \right)$$

$$\overset{\leftsquigarrow}{\mathcal{D}} = \overset{\leftsquigarrow}{d}_a \alpha^a + \beta \delta =$$

$$= - \overset{\rightsquigarrow}{d}_a \alpha^a + \beta \delta =$$

$$= - \alpha^a \overset{\rightsquigarrow}{d}_a - (d_a \alpha^a) \delta + \beta \delta$$

$$= - \alpha^a \overset{\rightsquigarrow}{d}_a + (\beta - d_a \alpha^a) \delta$$

antisymetrie

$$\overset{\rightsquigarrow}{\mathcal{D}} = - \overset{\leftsquigarrow}{\mathcal{D}} \iff \beta - d_a \alpha^a = - \beta \iff \beta = \tfrac{1}{2} d_a \alpha^a$$

$$\Rightarrow \overset{\rightsquigarrow}{\mathcal{D}} = - \overset{\leftsquigarrow}{\mathcal{D}} = \tfrac{1}{2} \left(\alpha^a \overset{\rightsquigarrow}{d}_a - \overset{\leftsquigarrow}{d}_a \alpha^a \right)$$

hermiticita

$$\overset{\rightsquigarrow}{\mathcal{D}} = \overset{\leftsquigarrow}{\mathcal{D}}^* \iff \alpha^a = - \alpha^{a*} \qquad \beta = \beta^* - d_a \alpha^{a*}$$

$$\iff \operatorname{Re} \alpha^a = 0 \qquad i \operatorname{Im} \beta = \tfrac{1}{2} d_a \alpha^a$$

Operátor 2. řádu

formulace bez kov. der.

$$\overset{\rightsquigarrow}{\mathcal D} = -\overset{\rightsquigarrow}{d}_a \cdot \alpha^{ab}\, \overset{\rightsquigarrow}{d}_b + \beta^a \overset{\rightsquigarrow}{d}_a + \gamma\,\delta$$

$$\overset{\rightsquigarrow}{\mathcal D}\cdot\phi = -d_a\left(\alpha^{ab} d_b\phi\right) + \beta^a d_a\phi + \gamma\,\phi$$

α, β, γ hustoty $\qquad \overset{\rightsquigarrow}{\mathcal D}\cdot\phi$ hustota

$$\overset{\leftsquigarrow}{\mathcal D} = -\overset{\leftsquigarrow}{d}_b\, \alpha^{ab}\cdot \overset{\leftsquigarrow}{d}_a + \overset{\leftsquigarrow}{d}_a\, \beta^a + \gamma\,\delta \qquad \leftarrow \quad \alpha^{ab}\cdot \equiv \cdot(\alpha^{ab}\delta)\cdot \equiv \cdot\,\alpha^{ab}$$

$$= -\overset{\rightsquigarrow}{d}_a \cdot \alpha^{ba}\, \overset{\rightsquigarrow}{d}_b - \vec{d}_a\, \beta^a + \gamma\,\delta$$

$$= -\vec{d}_a \cdot \alpha^{ba}\, \overset{\rightsquigarrow}{d}_b - \beta^a\, \vec{d}_a + (\gamma - d_a\beta^a)\,\delta$$

symetrie

$$\overset{\leftsquigarrow}{\mathcal D} = \overset{\rightsquigarrow}{\mathcal D} \quad \iff \quad \alpha^{ab} = \alpha^{ba} \qquad \beta^a = 0$$

$$\mathcal D = \overset{\leftsquigarrow}{\mathcal D} = \overset{\rightsquigarrow}{\mathcal D} = \overset{\leftsquigarrow}{d}_a\cdot(\alpha^{ab}\delta)\cdot\overset{\rightsquigarrow}{d}_b + \gamma\,\delta$$

$$\phi\cdot\mathcal D\cdot\psi = \int\Big((d_a\phi)\,\alpha^{ab}\,(d_b\psi) + \gamma\,\phi\psi\Big)$$

obor definice

vše funguje pouze pro dostatečně hladké fce s rozumným chováním na okraji / v nekonečnu

potřebujeme možnost ignorovat okrajové členy při "per-partes" (tj. $\vec{d} = -\overset{\leftsquigarrow}{d}$)

pokud ϕ, ψ takové nebudou (např. časový vývoj) tak musíme omezit oblast integrace explicitně pomocí $\chi[\Omega]$ – viz dále

Operátor 2. řádu

formulace pomocí kov. derivace

$$\overrightarrow{\tilde{\mathcal D}} = -\alpha^{ab}\,\overrightarrow{\tilde\nabla}_a\cdot\overrightarrow{\tilde\nabla}_b + \beta^a\,\overrightarrow{\tilde\nabla}_a + \gamma\,\delta$$

př.: $\uparrow g^{\frac12} g^{ab}$ $\quad\uparrow g^{\frac12} b^a$ $\quad\uparrow g^{\frac12} V$

jednoznačný zápis pro $\alpha^{ab} = \alpha^{(ab)}$

$\alpha^{[ab]}$ produkuje torzní člen, který lze zahrnout do β^a

$$\overrightarrow{\tilde{\mathcal D}}\cdot\phi = -\alpha^{ab}\,\nabla_a\nabla_b\phi + \beta^a\nabla_a\phi + \gamma\,\phi$$

není potřeba kov. der $\nabla \equiv d$ na fcích

potřeba kov. der. na 1-formách

$$\overleftarrow{\tilde{\mathcal D}} = -\overleftarrow{\tilde\nabla}_b\cdot\overleftarrow{\tilde\nabla}_a\,\alpha^{ab} + \overleftarrow{\tilde\nabla}_a\,\beta^a + \gamma\,\delta$$

$$= -\overrightarrow{\tilde\nabla}_a\cdot\overrightarrow{\tilde\nabla}_b\,\alpha^{ab} - \overrightarrow{\tilde\nabla}_a\,\beta^a + \gamma\,\delta$$

$$= -\tilde\nabla_a\cdot\alpha^{ab}\,\overrightarrow{\tilde\nabla}_b - \overrightarrow{\tilde\nabla}_a\left(\nabla_b\alpha^{ab} + \beta^a\right) + \gamma\,\delta$$

$$= -\alpha^{ab}\,\overrightarrow{\tilde\nabla}_a\cdot\overrightarrow{\tilde\nabla}_b - \left(2\nabla_b\alpha^{ab} + \beta^a\right)\overrightarrow{\tilde\nabla}_a + \left(-\nabla_a\nabla_b\alpha^{ab} - \nabla_a\beta^a + \gamma\right)\delta$$

symetrie

$$\overleftarrow{\tilde{\mathcal D}} = \overrightarrow{\tilde{\mathcal D}} \iff$$

$$\iff -2\nabla_b\alpha^{ab} - \beta^a = \beta^a \qquad -\nabla_a\left(\nabla_b\alpha^{ab} + \beta^a\right) + \gamma = \gamma$$

$$\iff \beta^a = -\nabla_b\alpha^{ab}$$

$$\mathcal D = \overleftarrow{\tilde{\mathcal D}} = \overrightarrow{\tilde{\mathcal D}} = \overleftarrow{\tilde\nabla}_a\cdot(\alpha^{ab}\delta)\cdot\overrightarrow{\tilde\nabla}_b + \gamma\,\delta$$

$$= \overleftarrow{\tilde d}_a\cdot(\alpha^{ab}\delta)\cdot\overrightarrow{\tilde d}_b + \gamma\,\delta$$

Konečná oblast

Ω oblast v M

charakt. fce

$$\chi[\Omega] = \begin{cases} 1 & \text{v } \Omega \\ 0 & \text{mimo } \Omega \end{cases} \qquad \chi[\Omega]^x$$

gradient char. fce

$$d_a \chi[\Omega] = \delta_a[\partial\Omega] \qquad \delta_a[\partial\Omega]^x$$

distribuce lokalizované na $\partial\Omega$ s orientací vnitřní normály

$$\int g^{\frac{1}{2}} a^m \delta_m[\partial\Omega] = \int_{\partial\Omega} a^m n_m g^{\frac{1}{2}}$$

$\Uparrow$

$$\int g^{\frac{1}{2}} a^m d_m \chi[\Omega] = -\int d_m(g^{\frac{1}{2}} a^m)\, \chi[\Omega] = -\int_\Omega \mathrm{div}(g^{\frac{1}{2}} a) = \int_{\partial\Omega} a^m dS_m = \int_{\partial\Omega} a^m n_m g^{\frac{1}{2}}$$

vnitř. norm. $\to n_m g^{\frac{1}{2}}$

okraj. člen při "per-partes"

$$\overleftarrow{d}_m \chi[\Omega] = -\overrightarrow{d}_m \chi[\Omega] = -\chi[\Omega]\overrightarrow{d}_m - \delta_m[\partial\Omega]\,\delta$$

! $$\overleftarrow{d}_m \chi[\Omega] + \chi[\Omega]\overrightarrow{d}_m = -\delta_m[\partial\Omega]\,\delta$$

dif. oper. 1. řádu (bilin. forma)

$$\overrightarrow{D} = g^{\frac{1}{2}} a^m \overrightarrow{d}_m$$

$$\overleftarrow{D}\chi[\Omega] = \overleftarrow{d}_m a^m g^{\frac{1}{2}} \chi[\Omega] = -\overrightarrow{d}_m a^m g^{\frac{1}{2}} \chi[\Omega] =$$

$$= -\chi[\Omega] g^{\frac{1}{2}} a^m \overrightarrow{d}_m - d_m(a^m g^{\frac{1}{2}} \chi[\Omega])\,\delta$$

$$= -\chi[\Omega]\overrightarrow{D} - (\nabla_m a^m)\chi[\Omega]\,\mathcal{G} - a^m \delta_m[\partial\Omega]\,\mathcal{G}$$

kde $\nabla g^{\frac{1}{2}} = 0$ $\quad \mathcal{G} = g^{\frac{1}{2}}\delta$

! $$\overleftarrow{D}\chi[\Omega] + \chi[\Omega]\overrightarrow{D} = -\underbrace{(\nabla_m a^m)\,\mathcal{G}}_{\text{objemový člen}} - \underbrace{a^m \delta_m[\partial\Omega]\,\mathcal{G}}_{\text{okrajový člen}}$$

Vlnové operátory

operátory s hlavním členem daným $\Box = \nabla^a \nabla_a$
symetrický na hl. fc. dostatečně klesajících na okraji

$$F = -\Box + V$$

$$\overset{\leftrightarrow}{F} = -\overset{\leftarrow}{d}_m \cdot g^{mn} g^{\frac{1}{2}} \vec{d}_n + V g = g \cdot \vec{F}$$

sym. forma lokalizovaná na Ω

$$F[\Omega] = \overset{\leftarrow}{d}_m \cdot (g^{mn} \chi[\Omega]\, g) \cdot \vec{d}_n + \chi[\Omega] V g$$

$$\phi \cdot F[\Omega] \cdot \psi = \int_\Omega \left((d_m \phi)\, g^{mn} (d_n \psi) + V \phi \psi \right) g^{\frac{1}{2}}$$

$F[\Omega]$ je symetrická na větší třídě fcí než $\chi[\Omega]\vec{F}$

$\chi[\Omega]\vec{F}$ není symetrické na neklesajících fcích

$$F[\Omega] = \overset{\leftarrow}{d}_m \cdot (\chi[\Omega] g^{mn} g) \cdot \vec{d}_n + \chi[\Omega] V g =$$

$$= -\chi[\Omega]\, \vec{d}_m \cdot g^{mn} g^{\frac{1}{2}} \vec{d}_n + \chi[\Omega] V g - \delta_m[\partial\Omega]\, g^{mn} g^{\frac{1}{2}} \vec{d}_n$$

$$= \chi[\Omega] \vec{F} + \overset{\rightarrow}{dF}[\partial\Omega]$$

$$\overset{\rightarrow}{dF}[\partial\Omega] = -\delta_m[\partial\Omega]\, g^{\frac{1}{2}} g^{mn} \vec{d}_n$$

$$\phi_1 \cdot \overset{\rightarrow}{dF}[\partial\Omega] \cdot \phi_2 = \int_{\partial\Omega} \underbrace{\phi_1}_{\varphi_1} \underbrace{g^{\frac{1}{2}} \vec{n}^m d_m \phi_2}_{\pi_2} = \int_{\partial\Omega} \varphi_1 \pi_2 = \varphi_1 \cdot \pi_2$$

Klein-Gordonova forma

$$\partial F[\partial\Omega] = \chi[\Omega] \vec{F} - \overset{\leftarrow}{F} \chi[\Omega] = \overset{\leftarrow}{dF}[\partial\Omega] - \overset{\rightarrow}{dF}[\partial\Omega]$$

$$\phi_1 \cdot \partial F[\Sigma] \cdot \phi_2 = \int_\Sigma \left((\vec{n} \cdot d\phi_1)\, \phi_2 - \phi_1 (\vec{n} \cdot d\phi_2) \right) g^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \int_\Sigma (\pi_1 \varphi_2 - \varphi_1 \pi_2) = \pi_1 \cdot \varphi_2 - \varphi_1 \cdot \pi_2$$